ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI

1) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$. Sia $\langle A, B\rangle = \text{traccia}(B^T A)$. Si dica se $\langle A, B\rangle$ è una funzione bilineare su V, e si dica se è un prodotto scalare su V.

2) Sia T l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ tale che

$$T(-2,1,1) = (2,1,0), \quad T(1,0,0) = (0,-1,0), \quad T(0,1,0) = (-1,0,0)$$

(i) Determinare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare canonico) dell'immagine di T.

(ii) Trovare una base per gli autospazi di T.

3) Si determini un valore di x tale per cui la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

soddisfi l'equazione matriciale

$$A^2 + B = 0,$$

dove B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice ottenuta è diagonalizzabile. della matrice ottenuta.

4) Sia A la matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica, giustificando la risposta, se A è diagonalizzabile, e nel caso affermativo si calcolino la matrice diagonale ad essa simile e una matrice ortogonale diagonalizzante.

5) Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali, tale che , per ogni i, $\Sigma_j a_{i,j} = 1$. Si provi che 1 è radice del polinomio caratteristico di A.

6) Sia data la seguente conica:

$$3x^2 + 4xy + 2x - 2y - 1 = 0.$$

(a) La si classifichi, se ne trovino i punti impropri, l' eventuale centro di simmetria e gli eventuali asintoti;

(b) Se ne determini la forma canonica;

(c) Se ne trovi l' eccentricità