Si giustifichino tutte le risposte

1. Si dica per quali valori del parametro reale k, l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, così definita:

$$f(x, y, z, t) = (y + kx^k, -x + z + kt, z + ky + kt),$$

risulta lineare.

Per tali valori di k, si dica se f è iniettiva, suriettiva o biettiva, se ne determinino nucleo e immagine e la matrice associata rispetto alla base
$B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ in $\mathbb{R}^4$, e quella canonica in $\mathbb{R}^3$

2. Si studino le posizioni reciproche dei tre piani α, β, γ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$
$\alpha : (t + 1)x + (t + 2)y + (t + 3)z = 2t + 3$
$\beta : x + y + tz = t$
$\gamma : 3x + 2y + z = 1 - t.$

3.) Si dica per quali valori del parametro reale k esiste un'applicazione lineare

$$f : \Re^4 \longmapsto \Re^3,$$

tale che:
$f(1, 1, 0, 1) = (2, 2, 0),$
$f(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 0),$
$f(3, 2, 0, 2) = (2k + 2, 6 - 2k, 0),$
$\Re^3 =< (1, 0, 1) > \bigoplus Im(f).$

Si determini inoltre la dimensione di $ker(f)$ (nei casi in cui una tale f esista) e si costruisca esplicitamente una applicazione lineare $f : \Re^4 \longmapsto \Re^3$ che soddisfi le condizioni richieste.

4) Si consideri la trasformazione $T : \Re[t^2] \to \Re[t]$ definita come segue:

$$T(at^2 + bt + c) = a(1 + t) + b + ct.$$

Si determinino dimensioni e base del nucleo e dell'immagine di T.

1) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i 3 vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

a) si dica se tali vettori sono linearmente indipendenti;

b) si consideri il vettore

$$v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix},$$

e si dica se esistono valori del parametro x tali per cui v_4 appartiene a V.