Algebra lineare e Geometria

Primo compitino

5 dicembre 2003

Tutte le risposte vanno giustificate.

1. Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -\lambda x + y - \lambda z = \lambda + 1\,; \\ x + 2y + z = -1\,; \\ -x + \lambda^2 y + 2z = 0\,. \end{cases}$$

2. Sia $S \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Detta $L_S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L_S x = Sx$, si determinino il nucleo $\ker(L_S)$ e l'immagine $\mathrm{im}(L_S)$ di L_S.

3. In ciascuno dei seguenti casi, stabilire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con le proprietà richieste. Nel caso ne esistesse più d'una, esibirne almeno due.

   (a) $\ker(T) = \{0\}$ e $\dim\big[\mathrm{im}(T)\big] = 2$.

   (b) $\ker(T) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino la retta s di equazioni parametriche

$$s : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

e la retta r di equazioni Cartesiane

$$r : \begin{cases} y + z + 3 = 0\,; \\ x + 3y + z = 0\,. \end{cases}$$

Detto π il piano passante per l'origine $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ e ortogonale alla retta s, si determinino le coordinate dei punti di intersezione (se esistono) tra r e π.

5. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n e U, W due sottospazi vettoriali di V di dimensioni rispettivamente k e l. Si mostri che, se $l + k > n$, allora U e W hanno intersezione non banale (i.e. si intersecano in un sottospazio di dimensione maggiore di zero).