# Algebra Lineare e Geometria

Secondo compitino

30 gennaio 2004

Tutte le risposte vanno giustificate.

1. Si determini la tangente all'iperbole $H$ di equazione $xy - x - 1 = 0$ nel punto $P = (1, 2)$.

2. Sia $P_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a $n$ a coefficienti reali, e siano $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ numeri reali distinti.

   ($a$) Si provi che la legge
   $$\langle p(x), q(x) \rangle = p(a_0)q(a_0) + \cdots + p(a_n)q(a_n)$$
   è una forma bilineare simmetrica su $P_n(\mathbb{R})$, e si dica se tale forma è definita positiva;

   ($b$) per $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, si determini una base ortogonale per $\langle\ ,\ \rangle$.

3. Sia $T$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio $V$ di dimensione $n$ su $\mathbb{C}$, con nucleo non banale di dimensione 3. Siano $V_{\lambda_1}$ e $V_{\lambda_2}$ gli autospazi relativi rispettivamente ai due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Sia inoltre $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_1}) = n - 3$.

   ($a$) Si provi che $\{I, T, T^2, T^3\}$ è un sistema di vettori linearmente dipendente nello spazio vettoriale degli endomrfismi di $V$;

   ($b$) si determinino dei coefficienti non tutti nulli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ tali che sia
   $$\alpha I + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 = 0\,.$$