

# Algebra Lineare

Prova scritta

20 febbraio 2004

1. Sia  $V$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $n \times n$  e sia  $\langle A, B \rangle = \text{traccia}(B^T A)$ . Si provi se  $\langle A, B \rangle$  è una funzione bilineare su  $V$ , e si dica se  $\cdot$  è un prodotto scalare su  $V$ .

2. Siano  $A = (1, 1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 2, 3, 0)$ ,  $C = (-1, 2, 1, -3)$ ,  $D = (1, 2, -1, 1)$  vettori di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Trovare una base del sottospazio somma  $L(A, B) + L(C, D)$ ;

(b) trovare la dimensione del sottospazio intersezione di  $L(A, B)$  e  $L(C, D)$ .

3. Sia  $T$  l'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$  tale che

$$T(-2, 1, 1) = (2, 1, 0), \quad T(1, 0, 0) = (0, -1, 0), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0, 0).$$

(a) Determinare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare canonico) dell'immagine di  $T$ ;

(b) trovare una base degli autospazi di  $T$ .

4. Quali relazioni devono intercorrere tra  $a$ ,  $b$  e  $c$  perché il seguente sistema lineare a coefficienti reali sia possibile? Quando è possibile, quante soluzioni ammette?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a; \\ 2x + 6y - 11z = b; \\ x - 2y + 7z = c. \end{cases}$$