Compitino di algebra lineare e geometria del 5 Dicembre 2008

Versione A

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1.

- Si dia la definizione di prodotto scalare standard e di norma su $\mathbb{R}^n$.
- Si enuncino la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e la disuguaglianza triangolare.
- Si dimostri la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.
- Si dimostri la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 2. Sia ℓ_1 la retta passante passante per $(1,-1,2)^t$ e $(0,2,1)^t$ e sia ℓ_2 la retta passante per $(0,1,0)^t$ e perpendicolare al piano Π di equazione Cartesiana $2x-3y+z=1$.

1. Stabilire se ℓ_1 sono parallele, perpendicolari, sghembe o incidenti.
2. Determinare $\text{dist}(\ell_1, \ell_2)$;
3. Stabilire se ℓ_1 è parallela o perpendicolare a Π; trovare $\text{dist}(\ell_1, \Pi)$.
4. Trovare $\text{dist}(\Pi, \mathbf{0})$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale.

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di V e di sottospazio affine con giacitura un dato sottospazio vettorale.
- Si dimostri che due sottospazi affini di V con la medesima giacitura sono uguali oppure disgiunti.
- Sia $f : V \to W$ lineare; dimostrare che se $w \in \text{im}(f)$ allora la controimmagine $f^{-1}(w) \subseteq V$ è un sottospazio affine con giacitura ????

- Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_d)$ una base di V. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

  1. f è iniettiva;
  2. $\ker(f) = 0$;
  3. $f(v_1), \ldots, f(v_d)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Sia A la matrice 4×3 data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Descrivere esplicitamente la trasformazione lineare L_A, specificando dominio, codominio, forma esplicita del trasformato di un vettore del dominio.
- Determinare dimensione, basi ed equazioni Cartesiane per $\ker(L_A)$.
- Determinare dimensione, basi ed equazioni Cartesiane per $\mathrm{im}(L_A)$
- Si studi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al variare di $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^?$, determinando per quali $\mathbf{b}$ esso è compatibile (ovvero, risolubile) e descrivendo per ogni tale $\mathbf{b}$ lo spazio delle soluzioni come un sottospazio affine (cioè traslato di ....).

Esercizio Extra per gli studenti di anni superiori al primo. Si determinino: $(2-i)(7+3i)$, $(5-i)^{-1}$, la rappresentazione polare di $(3-3i)^{27}$.