1. Data la proposizione

$$((p \Rightarrow q) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$$

dire se:

(a) è una tautologia
(b) è una contraddizione
(c) nessuna delle precedenti

2. Data la proposizione

$$((p \vee \neg q) \wedge r) \vee q$$

dire se:

(a) è tautologia
(b) è uguale a $q \vee r$
(c) nessuna delle precedenti

3. Data la proposizione

$$(p \wedge r) \vee r$$

dire se:

(a) è tautologia
(b) è contraddizione
(c) è uguale a r

4. Siano dati gli insiemi $A = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$, $B = 3\mathbb{Z}$ (cioè B è l'insieme format6.o da tutti i numeri interi che sono multipli di 3) e $C = 4\mathbb{Z}$ (cioè C è l'insieme formato da tutti i numeri interi che sono multipli di 4). Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme $((A \setminus B) \cap C) \cup (A \setminus C)$?

(a) 2^{10}

(b) 2^{3}

(c) 2^{11}

(d) 0

5. Siano a, b due numeri interi, e si supponga che sia:

$$M.C.D.(a,b) = 2, \quad M.C.D.(b,2a) = 2.$$

   a) b è divisibile per 2 ma non per 4;
   b) b è divisibile per 4;
   c) $M.C.D.(a,2b) = 2$;
   d) nessuna delle precedenti.

6. Sia $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e si consideri la legge $f : X \to \mathbb{Z}$ che associa a $n \in X$ il numero dei suoi divisori, ossia

$$f(n) = \mid \{r \in \mathbb{Z} : r|n\} \mid$$

   Allora:

   a) f è iniettiva;
   b) f è suriettiva;
   c) f è una funzione da X a $\mathbb{Z}$;
   d) f non è una funzione.

7. Una applicazione $f : A \to B$ è suriettiva se:

   a) per ogni $a \in A$ esiste $f(a)$ in B;
   b) per ogni $a, b \in A$ se $a \neq b$ allora $f(a) \neq f(b)$;
   c) per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$;
   d) per ogni $a, b \in A$ se $a = b$ allora $f(a) = f(b)$.

8. Siano dati gli insiemi $A_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ per $k = 1, 2, 3 \ldots$.
   Per $n \geq 1$ fissato, siano

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad T = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

   Risulta:

(a) $S = A_n$ e $T = A_1$

(b) $S = A_1$ e $T = A_n$

(c) $S = A_n$ e $T = \emptyset$

(d) $S = \mathbb{N}^*$ e $T = A_1$

9. Dire quale delle seguenti affermazioni è **falsa** dove l'insieme universo per ciascuna variabile è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali:

   (a) $\forall x, \exists y\ (xy = 1)$

   (b) $\forall x, \exists y\ (xy = 0)$

   (c) $\forall x, \exists y\ (x + y = -1)$

   (d) $\exists x, \forall y\ (xy = 0)$

10. Per quali valori di verità delle proposizioni p e q la proposizione composta
$$(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$$
risulta essere **falsa**?

    (a) p vera e q falsa

    (b) p falsa e q vera

    (c) p vera e q vera

    (d) p falsa e q falsa

11. La proposizione
$$(\neg q \to \neg p) \iff (p \to q)$$
è:

    (a) una tautologia

(b) una contraddizione

(c) né una tautolgia né una contraddizione

(d) logicamente equivalente a p.

12. Siano $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-4, -3, -2, 0, 2, 3\}$. Sia ρ la corrispondenza di A in B (*dunque ρ è un sottoinsieme di $A \times B$*) definita da

$$\rho = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b \quad \text{oppure} \quad a = -b\}$$

Quanti elementi ha ρ?

(a) 6

(b) 30

(c) 2^{30}

(d) 2^6

13. Sia ρ la corrispondenza di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ definita da

$$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x = \frac{1}{3} y - 1\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) ρ è una applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

(b) ρ è una corrispondenza di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ ma non una applicazione.

(c) $(5, 4) \in \rho$.

(d) $(4, 5) \in \rho$.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

8. Sia $P(n)$ il predicato (o funzione proposizionale):

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si dimostri, per induzione, che $\forall n \geq 1, P(n)$.