

VERSIONE B

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Sia V spazio vettoriale reale.

1. Dare la definizione di *prodotto scalare definito positivo* $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$; La coppia (V, φ) si dice uno *spazio vettoriale Euclideo*.
2. Sia (V, φ) uno spazio vettoriale Euclideo e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Si spieghi cosa significa che f è *simmetrico* (o *autoaggiunto*) rispetto a φ .
3. Se (V, φ) è uno spazio vettoriale Euclideo, si dia la definizione di *base ortonormale* di (V, φ) (ossia, una base di V ortonormale per φ). Sia \mathcal{B} una base ortonormale di (V, φ) . Si dimostri che $f : V \rightarrow V$ è simmetrico se e solo se la sua matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ nella base \mathcal{B} è

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale su \mathbb{K} e siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali.

1. Dimostrare che $U \cap W$ e $U + W$ (definire) sono sottospazi vettoriali di V .
2. Enunciare la relazione che intercorre tra le dimensioni di $U + W$, $U \cap W$, U e W (formula di Grassman).
3. Dimostrarla.

Esercizio 3.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se siete matricole).

1. Dare la definizione di *endomorfismo lineare* $f : V \rightarrow V$ (applicazione lineare di V in sè) e di *autovalore*, *autovettore* e *autospazio* di un endomorfismo f .

2. Dare la definizione di endomorfismo diagonalizzabile e dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se la sua matrice in una base qualsiasi di V è simile a
3. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori distinti di un endomorfismo f dato (quindi, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$) e se v_i è un autovettore di f per l'autovalore λ_i per ogni $i = 1, \dots, r$, dimostrare che allora v_1, \dots, v_r sono linearmente indipendenti.
4. Dedurre da quanto sopra che se $d = \dim(V) < +\infty$ e f ha d autovalori distinti (su \mathbb{K}), allora f è diagonalizzabile.
5. Supposto $d = \dim(V) < +\infty$, definire il *polinomio caratteristico* di f , dimostrando che esso non dipende dalla scelta di una base di V . Caratterizzare quindi gli autovalori di f attraverso il polinomio caratteristico.
6. Se $f \in \text{End}(V)$ (spazio degli endomorfismi) e λ è un autovalore, definire le *molteplicità algebrica* a_λ e *geometrica* g_λ di λ e dimostrare che $a_\lambda \geq g_\lambda$ (qui \geq è da scegliersi tra $=, <, \leq, >, \geq$).

Domanda extra

1. Dimostrare che se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e d è pari allora esistono endomorfismi $f : V \rightarrow V$ che non hanno autovalori (reali); si consideri prima il caso $d = 2$. Se d è dispari? (Si pensi al polinomio caratteristico - che è un polinomio reale di grado dispari - e alle sue radici).
2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\dim(V) < +\infty$, dimostrare che la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è sempre uguale a $\dim(V)$. Dobbiamo concluderne che ogni endomorfismo $f : V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale complesso è diagonalizzabile? Dimostrare o confutare con un controesempio.