

VERSIONE B

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Siano A, B spazio vettoriali sul campo \mathbb{K} , di dimensione finita a e b , rispettivamente.

1. Siano $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B$ basi di A, B rispettivamente. Descrivere la matrice $M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}_A}(f)$ associata a $f \in \text{Hom}(A, B)$; dimostrare che $M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}_A} : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \mathbb{K}^{b \times a}$ è un isomorfismo.
2. Se $f \in \text{Hom}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}(B, C)$, dimostrare che allora $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$ e che $\ker(g \circ f) \text{ ??? } \ker(f)$ (qui ??? va scelto tra $\subset, \subseteq, =, \supseteq, \supset$).
3. Siano $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B$ e \mathcal{B}_C basi di A, B, C rispettivamente. Descrivere la relazione tra $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_A}(g \circ f)$, $M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}_A}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_B}(g)$. Dimostrarla.
4. Si supponga $A = B$. Dare la definizione di autovettore, autovalore e di endomorfismo diagonalizzabile di A . Se $f \in \text{End}(A) =: \text{Hom}(A, A)$, si dimostri che allora una base \mathcal{B} di A è costituita da autovettori per f se e solo se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{}$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

1. Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti, di sistema di generatori e di base di V .
2. Supposto che esista una base finita di V , dimostrare che tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.
3. Enunciare e dimostrare il teorema della base incompleta.
4. Sia $d =: \dim(V) < +\infty$; dimostrare che per ogni sottospazio vettoriale $U \subseteq V$ esiste un sottospazio vettoriale $T \subseteq V$ tale che $V = U \oplus T$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale sul campo \mathbb{K} .

1. Si definisca lo spazio duale V^* e se ne calcoli la dimensione, costruendo la base duale di una base assegnata di V (e dimostrando esplicitamente che è una base).
2. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di V ; se $U \subseteq V$, si definisca il sottospazio annullatore $U^0 \subseteq V^*$ di U e si dimostri che è un sottospazio vettoriale di V^* .
3. Si esprima la dimensione di U^0 in termini delle dimensioni di V e U .
4. Si dimostri tale relazione.

Esercizio extra

Si costruisca esplicitamente una matrice reale C quadrata di ordine d (per qualche $d \geq 2$) tale che l'endomorfismo $L_C : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}^d$ dato da $L_C(X) =: CX$ risulti diagonalizzabile per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ma non diagonalizzabile per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.