

VERSIONE A

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1.

Sia

$$A\mathbf{x} = \mathbf{v}$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali

1. si enunci il Teorema di Rouché-Capelli;
2. lo si dimostri;
3. si dimostri che l'insieme T delle soluzioni del sistema, o è vuoto, oppure è un sottospazio affine di \mathbf{R}^n ed è un sottospazio vettoriale se e solo se...;
4. nel caso in cui T sia un sottospazio vettoriale, se ne determini la dimensione in funzione di n e del rango di A ;

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

1. Si definisca lo spazio duale V^* di V .
2. Determinare $\dim(V^*)$ (con dimostrazione) e, se esiste, un isomorfismo esplicito $V \rightarrow V^*$.
3. Sia U un sottospazio vettoriale di V . Si definisca l'annullatore $U^\circ \subseteq V^*$ di U e si provi che se $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ allora

$$U^\circ = \bigcap_{i=1}^k \text{span}\{u_i\}^\circ.$$

4. Si determini $\dim(U^\circ)$, con dimostrazione.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo dei numeri reali.

1. Si dia la definizione di prodotto scalare ϕ su V .
2. Si dimostri che, se ϕ è definito positivo, allora esiste una base \mathcal{B} tale che la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ di ϕ rispetto a \mathcal{B} è la matrice identica I_n .
3. Si dimostri che, comunque si scelga un prodotto scalare ϕ (anche non definito positivo) e per ogni base \mathcal{C} di V , la matrice $M_{\mathcal{C}}(\phi)$ associata a ϕ rispetto a \mathcal{C} è congruente a una matrice diagonale (esiste cioè una matrice invertibile N tale che $N^t M_{\mathcal{C}}(\phi) N$ sia diagonale).
4. È anche vero che $M_{\mathcal{C}}(\phi)$ è *simile* a una matrice diagonale? La risposta sarebbe diversa se ϕ fosse una forma bilineare, non necessariamente simmetrica?

Domanda extra

1. Dimostrare che esistono n radici distinte dell'unità per ogni intero positivo n .
2. Dimostrare che se $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ ne è una radice, allora tale è anche $\bar{\lambda}$.