Compitone di algebra lineare e geometria del 5 Febbraio 2008

VERSIONE A

Nome e cognome: Renatoh Zero

Matricola: 0

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Sia $\varphi(X,Y) =: X^t AY \ (X, Y \in \mathbb{R}^3)$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si dimostri che φ è un prodotto scalare e se ne trovino le matrici nella base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ e nella base $\mathcal{B} = \big(e_1+e_2+e_3, e_1+e_2, e_1-e_2\big)$.
2. Trovare gli autovalori di A e una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$ ortonormale per il prodotto scalare standard costituita da autovettori di A.
3. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale per φ.
4. Determinare spazio nullo, nullità e indice di positività di φ.

Soluzione. φ è un prodotto scalare dato che A è simmetrica. Chiaramente

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = A,$$

ove $\mathcal{C}$ è la base canonica, mentre

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})^t \, M_{\mathcal{C}}(\varphi) \, M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})^t \, A \, M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}).$$

Abbiamo

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, usando ad esempio lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga:

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \det\Big(x\, I_3 - A\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ -2 & X-2 & 2 \\ 0 & 2 & X+2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 2 \\ 2 & X+2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & X+2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\Big[(X-2)(X+2) - 4\Big] + 2(-2)(X+2) \\
&= (X-1)\Big[X^2 - 8\Big] - 4X - 8 \\
&= X^3 - X^2 - 8X + 8 - 4X - 8 = X^3 - X^2 - 12X \\
&= X\,\big(X^2 - X - 12\big).
\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}
X^2 - X - 12 &= \left(X^2 - 2\,\frac{1}{2}\,X + \frac{1}{4}\right) - 12 - \frac{1}{4} \\
&= \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4},
\end{aligned}$$

quindi

$$X^2 - X - 12 = 0$$

se e solo se

$$X - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} = \pm\frac{7}{2},$$

ossia se e solo se

$$X = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}.$$

Pertanto, per Ruffini, $X^2 - X - 12 = (X - 4)(X + 3)$ e

$$p_A(X) = (X + 3)\, X\, (X - 4).$$

Quindi gli autovalori di A sono $-3, 0, 4$ tutti con molteplicità geometrica uno. Quindi, la nullità è $n_\varphi = 1$ e l'indice di positività è $p_\varphi = 1$.

Lo spazio nullo di φ coincide con l'autospazio dell'autovalore 0, cioè con il nucleo di A:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \ker(A) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y = 0,\ y + z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

L'autospazio dell'autovalore -3 è

$$\begin{aligned}
V_{-3} &= \ker(A + 3I) \\
&= \ker\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + y = 0,\ -2y + z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -4x \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

L'autospazio dell'autovalore 4 è

$$\begin{aligned}
V_4 &= \ker(A-4I) \\
&= \ker\left(\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -3x+2y=0,\ y+3z=0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} -2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Ora

$$\mathcal{D} =: \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standar d costituita da autovettori di A. L'ortogonalità può essere verificata direttamente, ma segue dal fatto che autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice reale *simmetrica* sono sempre ortogonali per il prodotto scalare standard.

Per ottenere una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard costituita da autovettori di A basta allora dividere ciascuno dei vettori di $\mathcal{D}$ per la rispettiva norma. Quindi, dato che

$$\left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{15},$$

$$\left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21},$$

possiamo prendere

$$\widetilde{\mathcal{D}} =: \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ -\frac{3}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \right).$$

La stessa base $\widetilde{D}$ è ortogonale per φ. Infatti, se

$$N =: M_{\mathcal{C}}^{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix},$$

allora $N \in O(3)$, in virtù della ortonormalità di $\widetilde{\mathcal{D}}$. Pertanto, per costruzione abbiamo

$$M_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\varphi) = N^t M_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\varphi) N = N^{-1} A N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

L'ultima uguaglianza esprime il fatto che $\widetilde{\mathcal{D}}$ è una base di autovettori di A. Ma allora, essendo $M_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\varphi)$ diagonale, $\widetilde{\mathcal{D}}$ è una base ortogonale per φ.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2y + 2z \\ x - y - 3z \\ -x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

1. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^?$, e una base per il suo annullatore $\ker(f)^0 \subseteq (\mathbb{R}^?)^*$ (specificare '?');

2. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\mathrm{Im}(f)$;

3. Descrivere parametricamente la controimmagine $\ell =: f^{-1}\Big((1, 0, 1, -1)^t\Big)$ (se non vuota), esibendola come sottospazio affine di $\mathbb{R}^?$.

4. Trovare la distanza (rispetto alla norma Euclidea standard) tra ℓ e $(0, 1, 0)^t$.

Soluzione. Naturalmente, $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, che domande da prof! Abbiamo poi $f = L_A$, ove

$$A = M^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eseguiamo operazioni elementari per righe sulla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 & b \\ 1 & -1 & -3 & c \\ -1 & 1 & 3 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b}{2} \\ 1 & -1 & -3 & c \\ -1 & 1 & 3 & d \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & -3 & -3 & -a+c \\ 0 & 3 & 3 & a+d \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -a+\frac{3}{2}b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{3}{2}b+d \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a-b \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2a+3b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 2a-3b+2d \end{array}\right)$$

Quindi, A ha rango due e pertanto $\dim\ker(A) = 3 - 2 = 1$. In effetti, ponendo $a = b = c = d = 0$ vediamo che

$$\begin{aligned} \ker(f) = \ker(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2z = 0,\ y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

La prima eguaglianza fornisce equazioni Cartesiane per $\ker(A)$, la seconda fornisce una parametrizzazione.

Una base per $\ker(f)^0 \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ si desume imediatamente dalle equazioni Cartesiane:

$$\mathcal{R} = \left(e_1^* - 2e_3^*, e_2^* + e_3^*\right),$$

ove $\mathcal{C} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ è la base duale di $(\mathbb{R}^3)^*$.

Dato che nella riduzione a scala di A otteniamo gradini in corrispondenza della prima e della seconda colonna, una base per $\mathrm{im}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ è data dalle prime due colonne di A:

$$\mathcal{S} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Inoltre, $(a, b, c, d)^t \in \mathrm{im}(A)$ se e solo se la matrice completa ha lo stesso rango di A (teorema di Rouché-Capelli), quindi se e solo se

$$-2a + 3b + 2c = 0,\ 2a - 3b + 2d = 0.$$

Queste ultime sono pertanto equazioni Cartesiane per $\mathrm{im}(A)$.

Per rispondere al punto 3, poniamo $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$. Le ultime due righe della matrice estesa sono identicamente nulle, quindi $(1, 0, 1, -1)^t \in \mathrm{im}(A)$, quindi la controimmagine $f^{-1}\left((1, 0, 1, -1)^t\right) \neq \emptyset$. Omettendo le due righe nulle, otteniamo che $f^{-1}\left((1, 0, 1, -1)^t\right)$ è definito dal sistema lineare non omogeneo corrispondente alla matrice estesa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\ell = f^{-1}\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right)\right) &= \left\{\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) : x = 2z+1,\, y = -z\right\} \\
&= \left\{\left(\begin{array}{c} 2z+1 \\ -z \\ z \end{array}\right) : z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) + z\left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right) : z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) + \operatorname{span}\left\{\left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)\right\} \\
&= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) + \ker(f).
\end{aligned}$$

ℓ è una retta affine in $\mathbb{R}^3$, con parametrizzazione

$$X(t) = \left(\begin{array}{c} 2t+1 \\ -t \\ t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) + t\left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right).$$

Per rispondere al punto 4 dobbiamo determinare l'unico $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$X(t_0) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \perp \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right).$$

La distanza cercata è allora

$$\operatorname{dist}\left(\ell, \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)\right) = \left\| X(t_0) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \right\|.$$

Se $\langle\,,\,\rangle$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\left\langle X(t_0) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)\right\rangle &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 2t+1 \\ -t-1 \\ t \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)\right\rangle \\
&= 4t+2+t+1+t = 6t+3 = 3(2t+1).
\end{aligned}$$

Quindi, $t_0 = -\frac{1}{2}$ e

$$X(t_0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X\left(-\frac{1}{2}\right) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto,

$$\operatorname{dist}\left(\ell, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B} = \big(v_1, v_2, v_3\big)$, ove $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 - e_3$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Spiegare perchè esiste ed è unica $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $f\Big((1,0,1)^t\Big) = (1,-1,0)^t$, $f\Big((1,-1,0)^t\Big) = (-1,0,-1)^t$, $f\Big((1,0,-1)^t\Big) = (1,0,-1)$; determinare la matrice di f nella base $\mathcal{B}$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.
3. Determinare il rango di f, la traccia e il determinante di f e i suoi autovalori; stabilire se f è diagonalizzabile.
4. Determinare la matrice di f nella base canonica, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

Soluzione. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base se e solo se A ha rango tre. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando lungo la seconda riga, abbiamo

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2 \neq 0,$$

quindi A è invertibile, pertanto $\mathcal{B}$ è una base.

Per ogni scelta di $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, esiste quindi una unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente

$$f(e_1 + e_3) = w_1,\ f(e_1 - e_2) = w_2,\ f(e_1 - e_3) = w_3,$$

il che risponde in particolare alla prima parte della seconda domanda. Abbiamo chiaramente

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\mathrm{tr}(f) = 1$, $\det(f) = 1$. In particolare, f ha rango tre.

Il polinomio caratteristico può calcolarsi usando la matrice di f in una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$. Quindi,

$$p_f(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\,(X^2+1).$$

Dato che X^2+1 non ha radici reali, f *non* è diagonalizzabile sul campo reale.

Sia come sopra $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ e troviamo l'inversa A^{-1} eseguendo operazioni per righe sulla matrice estesa $(A|I)$. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Pertanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}
M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \\
&= A\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, A^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Come verifica, si noti che $\mathrm{tr}\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)\right) = \frac{1}{2}(2-1+1) = 1$ e

$$\begin{aligned}
\det\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2}{8}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{4}(1+3) = 1,
\end{aligned}$$

coerentemente con il conto qui sopra.

Morale: *La geometria non è reato.*