

Prodotti scalari

ESERCIZIO 1. Trovare una base ortonormale \mathcal{B}_V rispetto al prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^3 per il sottospazio V generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale per il sottospazio W_\perp ortogonale a V che completi \mathcal{B}_V e calcolare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla nuova base ortonormale \mathcal{B}' di \mathbb{R}^3 così ottenuta. Dimostrate che la matrice B' associata alla base \mathcal{B}' è ortogonale.

SOLUZIONE.

Applichiamo il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Una base ortogonale $\{u_1, u_2\}$ si ottiene ponendo $u_1 = v_1$ e

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una base ortonormale $\mathcal{B}_V = \{w_1, w_2\}$ per V dobbiamo normalizzare i vettori della base ortogonale $\{u_1, u_2\}$:

$$w_1 = u_1/\|u_1\| = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$w_2 = u_2/\|u_2\| = 1/2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo spazio ortogonale a V è di dimensione 1. Per trovare un vettore generatore basta prendere un vettore a_3 non contenuto in V , per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e applicare ancora una volta il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

$$u_3 = a_3 - \langle a_3, w_1 \rangle w_1 - \langle a_3, w_2 \rangle w_2 = a_3 - 1/\sqrt{3}w_1 - 1/\sqrt{2}w_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 1. Si noti che abbiamo scritto $\langle a_3, w_i \rangle$ invece di $\langle a_3, w_i \rangle / \langle w_i, w_i \rangle$ in quanto i vettori w_i sono ortonormali.

Lo spazio W ortogonale a V è dunque lo span di $u'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (vettore ottenuto moltiplicando u_3 per 6).

Osservazione 2. Si noti che l'equazione cartesiana di V (facendo come solito il passaggio parametrico-cartesiano) è $x - y - 2z = 0$; come vettore normale ad un piano espresso in forma cartesiana possiamo prendere un vettore con coefficienti direttori uguali ai parametri di giacitura del piano: in altre parole potevamo prendere direttamente il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ senza usare una seconda volta Gram-Schmidt...

Per trovare una base ortonormale di W basta normalizzare u_3 :

$$w_3 = u_3 / \|u_3\| = u'_3 / \|u'_3\| = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e possiamo completare la $\mathcal{B}_V = \{w_1, w_2\}$ con w_3 .

Ricordiamo che se uno spazio vettoriale V è dotato di un prodotto scalare $\phi(\cdot, \cdot)$ definito positivo, allora le coordinate di un vettore v rispetto ad una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V sono date da:

$$v = \phi(v, v_1)v_1 + \dots + \phi(v, v_n)v_n.$$

Nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle w_1 + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle w_2 + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle w_3,$$

e i coefficienti rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di v sono quindi $(1/\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{6})$.

¹due vettori linearmente dipendenti hanno la stessa normalizzazione: $\alpha u / \|\alpha u\| = u / \|u\|$

Se $\mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{B}}$ è la matrice associata ad prodotto scalare ϕ rispetto ad una base \mathcal{B} e $\mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{C}}$ è la matrice associata ad prodotto scalare ϕ rispetto ad una base \mathcal{C} , abbiamo che $B^T \mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{B}} B = \mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{C}}$ dove B è la matrice di cambiamento di base.

Nel nostro caso la base di partenza è la base canonica (che indicheremo con \mathcal{E}), quella di arrivo \mathcal{B}' e ϕ è il prodotto scalare canonico; ne deduciamo che $\mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{E}} = I_3$ e che $B = B'$. Applicando la formula di cambiamento di base abbiamo quindi le seguenti identità:

$$B'^T \mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{E}} B' = B'^T I_3 B' = \mathcal{M}(\phi)_{\mathcal{B}'} = I_3$$

dove l'ultima identità viene dal fatto che \mathcal{B}' è base ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico. Otteniamo quindi che $B'^T B' = I_3$, che è appunto la definizione di matrice ortogonale.

Osservazione 3. Ricordiamo che se una matrice è ortogonale allora il suo determinante è uguale a 1 o -1 . Si noti che il viceversa non è vero: è facile trovare esempi di matrici non ortogonali con determinante uguale a 1 o -1 .

PS : Il procedimento è corretto ma è “statisticamente probabile” che ci siano degli errori di calcolo; sarebbe quindi un buon esercizio verificare i calcoli!