Miscellanea di esercizi[1]

ESERCIZIO 1. Calcolare, al variare del parametro α, la distanza del punto $P_0 = (1, 1, 2)$ dalla retta

$$r_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\alpha \\ -1 \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 2. Si determino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i 3 piani di equazioni cartesiane:

$$\pi_1 : x - 2 = 0 \quad \pi_2 : 2x + y - 1 = 0 \quad \pi_3 : x - 3y + kz = 0$$

hanno come intersezione

a) un punto;

b) una retta.

ESERCIZIO 3. Sia W, T i sottoinsiemi di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dati da

$$W = \{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad T = \{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & a \end{vmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dimostrare che W, T sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e trovare una base per $W, T, W \cap T$ e $W + T$.

ESERCIZIO 4. Sia U il sottoinsieme di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formato dalle matrici $\begin{vmatrix} 0 & a+b \\ a & b \end{vmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}^2$ la matrice $\begin{vmatrix} 0 & a+b \\ a & b \end{vmatrix}$ è: i) invertibile; ii) simmetrica; iii) ortogonale.

[1] Gli esercizi seguono più o meno l'ordine seguito nelle esercitazioni: detto questo potete usare le tecniche viste alla fine del semestre per risolvere esercizi visti all'inizio del semestre. Questa osservazione vale, a maggior ragione, in sede di esame...

ESERCIZIO 5. Data $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, si consideri $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da

$$T(X) = AX - XA\,.$$

Dimostrate che T è lineare, trovate $\ker T$ e ImT e verificate che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker T \oplus ImT$.

ESERCIZIO 6. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} t-2 \\ t-3 \\ 3-t \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-2 \\ 3-t \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-3 \\ 4-t \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $f_t(v_1) = e_1$, $f_t(v_2) = e_2$ e $f_t(v_3) = e_3$, e per tali valori costruire la matrice associata a f_t rispetto alla base canonica.

ESERCIZIO 7. In ciascuno dei seguenti casi dire se è possibile costruire applicazioni lineari con le proprietà richieste. In caso ne esistano più di una, mostrarne almeno due:

a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker T = Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $ImT = Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T = Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;;

ESERCIZIO 8. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x + y + z + t = 0$, e $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare t.c. $f(v) = v \; \forall v \in V$ e $f(w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Stabilire se esiste una base di autovettori per f, e in tal caso trovarla.

ESERCIZIO 9. Siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e sia $S_k = \{\, w \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v_i, w\rangle = 0\}$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare canonico. Si determino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui

a) $S_k \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$;

b) S_k ha dimensione maggiore di 1; in tal caso trovate una base per S_k.

ESERCIZIO 10. Discutere, al variare del parametro t, l'invertibilità della matrice

$$A_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Cosa possiamo dire sulle soluzioni del sistema $A_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
2. Sia L_{A_1} l'endomorfismo che ha A_1 come matrice associata alla base canonica. Esprimere in forma cartesiana l'immagine di L_{A_1}.

ESERCIZIO 11. Stabilire se una matrice A con due autovalori distinti non nulli, ciascuno con molteplicità algebrica 1, e t.c. $\ker A$ ha dimensione maggiore di zero è diagonalizzabile.
Cosa si può dire se i due autovalori non nulli sono uguali?
E se la matrice A è simmetrica?

ESERCIZIO 12. Sia $P(\lambda) = (\lambda - 2)3(\lambda - 3)2(\lambda - 1)$ il polinomio caratteristico di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V. Quale è la dimensione di V? L'endomorfismo è diagonalizzabile? Discutere i casi possibili, e scrivere esplicitamente un endomorfismo per ognuno di essi.

ESERCIZIO 13. Si calcoli il rango dell'applicazione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ data da
$$F(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
e si stabilisca se è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 14. Siano $\mathcal{B}_0 = \{ p_1, p_2, p_3 \} \subset \mathbb{R}_2[t]$ e $\mathcal{B}_1 = \{ q_1, q_2, q_3 \} \subset \mathbb{R}_2[t]$, dove: $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1 = -1 + t, q_2(t) = -1 + t - t^2, q_2(t) = 4t - 2t^2$. Mostrare che $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ sono basi e scrivere $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1}$.

ESERCIZIO 15. Sia $\mathcal{C}$ una base di $\mathbb{R}^n$ e chiamiamo C la matrice ottenuta accostando i vettori della base $\mathcal{C}$. Dimostrare che esiste un prodotto scalare ϕ definito positivo per cui $\mathcal{C}$ è una base ortonormale e che la matrice $S = (C^T)^{-1}C^{-1}$ è la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ (vale a dire che $S = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$).

ESERCIZIO 16. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un matrice simmetrica tale che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = I_n$. Dimostrare che $A^2 = I_n$ (aiuto: ogni matrice A simmetrica reale è simile ad una matrice diagonale).