Endomorfismi, similarità e autospazi

ESERCIZIO 1. Siano $u, v \in End(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che:

1. Se il prodotto $u \circ v$ è un isomorfismo allora anche $v \circ u$ è un isomorfismo;
2. dimostrare che se u è un isomorfismo allora $u \circ v$ e $v \circ u$ hanno lo stesso polinomio caratteristico;
3. dimostrare che $u \circ v$ e $v \circ u$ hanno gli stessi autovalori per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$.

SOLUZIONE.

1. Basta dimostrare che u e v sono isomorfismi. Se $u \circ v$ è un isomorfismo allora anche v è un isomorfismo: se non lo fosse esisterebbe un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $v(x) = 0$ e dunque $x \in \ker(u \circ v)$, il che è assurdo visto che $\ker(u \circ v)$ si riduce al vettore nullo (per ipotesi $u \circ v$ è un isomorfismo).

   Sia adesso v^{-1} l'isomorfismo inverso di v: u si può scrivere come $(u \circ v) \circ v^{-1}$ e quindi è un isomorfismo in quanto composizione di isomorfismi.

2. Siano A e B due matrici a n righe e n colonne rappresentanti u e v. Il polinomio caratteristico di $u \circ v$ è $\chi_{u \circ v}(\lambda) = Det(AB - \lambda I_n)$. Dato che per ipotesi u è un isomorfismo esiste A^{-1} inversa di A e abbiamo, applicando Binet, le seguenti identità:

$$\chi_{u \circ v}(\lambda) = Det(AB - \lambda I_n) = Det(A^{-1})Det(A)Det(AB - \lambda I_n) =$$
$$= Det(A^{-1})Det(AB - \lambda I_n)Det(A) = Det(A^{-1}(AB - \lambda I_n)A) =$$
$$= Det(A^{-1}ABA - \lambda A^{-1}I_n A) = Det(BA - \lambda I_n) := \chi_{v \circ u}(\lambda).$$

3. Supponiamo che $u \circ v$ abbia un autovalore λ. Abbiamo due sottocasi:

   i) Sia $\lambda = 0$: $u \circ v$ non è un isomorfismo (il nucleo non è nullo) e dunque anche $v \circ u$ non è un isomorfismo (perché? Provate a rivedere la questione precedente...). Il sottospazio $\ker(v \circ u)$ che coincide per definizione con l'autospazio V_0 di $v \circ u$ è quindi non nullo e $\lambda = 0$ è autovalore di $v \circ u$.

   ii) Sia $\lambda \neq 0$ e sia x un vettore non nullo dell'autospazio V_λ di $u \circ v$. Chiamiamo x' il vettore (non nullo) $v(x)$. Consideriamo l'immagine di x' per l'applicazione $v \circ u$: $v \circ u(x') = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda x'$ e quindi x' è autovettore (non nullo) di $v \circ u$ relativo all'autovalore λ.

∎

ESERCIZIO 2. Verificare che $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ non sono simili e che B non è diagonalizzabile.

SOLUZIONE.

Le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico ma l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2 nel caso di A e 1 nel caso di B: $dim \ker \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 - rk \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$. Quindi B non è diagonalizzabile. Se B fosse simile ad A avremmo che B è diagonalizzabile (A è diagonale) il che contraddice quanto detto prima; dunque A e B non sono simili. ∎

ESERCIZIO 3. Esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di rango 2 e con un autovalore λ di molteplicità geometrica 2? Se sì fornire un esempio e calcolare l'autospazio V_λ. Mostrare un esempio di endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di rango 2 e con un autovalore $\lambda \neq 0$ di molteplicità algebrica 2 e non diagonalizzabile.

SOLUZIONE.

Per il teorema del rango un endomorfismo T di $\mathbb{R}^5$ di rango 2 ha come dimensione del nucleo 3. In altre parole 0 è un'autovalore il cui autospazio (che è $\ker T$) è di dimensione 3.

Se T ha un autovalore λ (che supporremo chiaramente diverso da 0) di molteplicità geometrica 2, la somma delle dimensioni degli autospazi di T coincide con la dimensione dello spazio totale $\mathbb{R}^5$ e quindi T è diagonalizzabile.

Come esempio di tale endomorfismo basta prendere $\lambda = 1$ e l'applicazione lineare T tale che $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = e_2$ e $T(e_i) = 0$ per $i = 3, 4, 5$ dove $\{e_1, \dots, e_5\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$; la base canonica è una base di autovettori e la matrice associata è diagonale:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si noti che non c'è nessun calcolo da fare per trovare l'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1: è di dimensione 2 (per ipotesi!) e come base possiamo prendere i primi due vettori della base canonica (per come abbiamo definito T !).

Per trovare un esempio di endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di rango 2 e con un autovalore $\lambda \neq 0$ di molteplicità algebrica 2 bisogna trovare un endomorfismo per cui la dimensione dell'autospazio V_λ è 1 (altrimenti sarebbe diagonalizzabile). Prendiamo ancora $\lambda = 1$ e l'applicazione lineare T' tale che $T'(e_1) = e_1$, $T'(e_2) = xe_1 + e_2$ e $T'(e_i) = 0$ per $i = 3, 4, 5$ dove $\{e_1, \ldots, e_5\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e x è un numero diverso da 0; la matrice associata è:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Notiamo che $A' - I_5 = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ha rango 4 se e solo se $x \neq 0$.

Per il teorema del rango ne deduciamo che l'autospazio $V_1 = \ker(A' - I_5)$ ha dimensione 1 se e solo se $x \neq 0$. Per $x \neq 0$ l'applicazione T' é dunque non diagonalizzabile. ∎