

Matrici: Autovalori, Autovettori e Polinomio Caratteristico

Richiami di teoria.

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $T : V \rightarrow V$ una applicazione lineare (i.e. un *endomorfismo* di V).

Definizione 1. Un vettore non nullo $v_0 \in V$ è detto **autovettore** di T relativo a $\lambda \in \mathbb{K}$ se $T(v_0) = \lambda v_0$. L'insieme degli autovalori di T è detto spettro di V (lo denoteremo con $Sp(V)$).

Definizione 2. Sia $\lambda \in Sp(V)$. L'insieme $V_\lambda = \{v \mid T(v) = \lambda v\}$ è detto **autospazio** di T relativo a λ .

Osservazione 1. V_λ è un sottospazio di V e coincide con $Ker(T - \lambda Id)$, dove Id è la applicazione identica.

Definizione 3. Un endomorfismo T è detto **diagonalizzabile** se esiste una base di V composta di autovettori di T . La matrice associata a tale base è dunque diagonale.

Proposizione 1. Un endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se $\bigoplus_{\lambda \in Sp(T)} V_\lambda = V$.

Definizione 4. Sia A la matrice rappresentante T rispetto ad una base \mathcal{B} e supponiamo che \mathcal{C} sia una base di V composta di autovettori di T . Sia $C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice di cambiamento di base; la matrice $A' = C^{-1}AC$ è dunque diagonale e si dice che C *diagonalizza* A .

Definizione 5. Un endomorfismo T è detto **triangolabile** se esiste una base di V per cui la matrice associata a tale base è una matrice triangolare alta superiore (i.e. tutte le entrate sotto la diagonale sono nulle).

Definizione-Proposizione. Sia A la matrice rappresentante T rispetto ad una base \mathcal{B} . Si chiama **polinomio caratteristico** di T il determinante della matrice $A - \lambda Id$ dove $\lambda \in \mathbb{K}$ è un parametro:

$$\chi_T(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda Id)$$

Si noti che $\chi_T(\lambda)$ non dipende dalla scelta della matrice rappresentativa di T .

Osservazione 2. Le radici di $\chi_T(\lambda)$ sono esattamente gli autovalori di T .

Definizione 6. Sia $\lambda_0 \in Sp(T)$. Si chiama **molteplicità algebrica** di λ_0 (che denoteremo con $\mu_a(\lambda_0)$) la molteplicità di λ_0 come radice di $\chi_T(\lambda)$. Si chiama **molteplicità geometrica** di λ_0 (che denoteremo con $\mu_g(\lambda_0)$) la dimensione di V_{λ_0}

Proposizione 2. Per ogni $\lambda_0 \in Sp(T)$ si ha che $\mu_a(\lambda_0) \geq \mu_g(\lambda_0) \geq 1$.

Proposizione 3. Un endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se $\chi_T(\lambda)$ ha esattamente $n = \dim(V)$ radici (contate con la loro relativa molteplicità) e per ogni radice λ_i si ha che $\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$.

Proposizione 4. Se T è un endomorfismo di V tale che $\chi_T(\lambda)$ ha esattamente $n = \dim(V)$ radici distinte allora T è diagonalizzabile

Esercizio 1. Sia T l'endomorfismo di \mathbb{R}^2 definito da $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dire se T è diagonalizzabile e in tal caso trovare una base tale che la matrice associata a T è diagonale.

SOLUZIONE. La matrice associata a T rispetto alla base canonica è $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Calcoliamo $\chi_T(\lambda)$:

$$\chi_T(\lambda) = \text{Det}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \text{Det}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda).$$

Visto che $\chi_T(\lambda)$ ha due radici distinte 1 e 2 e che $\text{Dim}(R^2) = 2$ deduciamo che T è diagonalizzabile.

Per trovare una base per cui la matrice associata a T è diagonale dobbiamo calcolare $V_1 = \text{Ker}(T - Id)$ e $V_2 = \text{Ker}(T - 2Id)$.

Ricordiamo adesso che $v \in \text{Ker}(T - Id)$ se e solo se $(A - Id)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

le soluzioni del sistema $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono i vettori $\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}$ e quindi $V_1 = \text{Ker}(T - Id) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

È immediato invece che $V_2 = \text{Ker}(T - 2Id) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; infatti $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e dunque $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$. Visto $\text{dim}(V_2) = 1$ allora concludiamo che $V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Come base possiamo quindi prendere $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e la matrice associata è $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. La matrice che diagonalizza A è la matrice composta dai vettori della nuova base: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$. ■