Correzione Compitino 30/11/2007
VERSIONE A

Esercizio 1. La matrice A rappresenta un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, dunque il vettore $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$, mentre il termine noto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Riducendo A a scala, si ottiene la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha due pivot non nulli. Ricaviamo $rg(A) = 2$, e quindi per il teorema della nullità più rango $\dim \ker(L_A) = 2$.

- Risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3 - x_4,$$

che sostituita nella prima restituisce

$$x_1 = \frac{2}{3}x_3 - x_4 - x_3 + x_4 = -\frac{1}{3}x_3.$$

Dunque

$$\ker(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per passare dalla forma parametrica alla cartesiana risolviamo il sistema che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{-1}{3} & 0 & x_1 \\ \frac{2}{3} & -1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Riducendo a scala otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|l} \frac{-1}{3} & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 3x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + x_4 \end{array}\right),$$

che ammette soluzione se e solo se

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Queste sono le equazioni cartesiane richieste.

- Abbiamo già visto che $\mathrm{Im}(L_A)$ ha dimensione 2. Poiché i pivot si trovano nelle prime due colonne della matrice ridotta, una base è data dalle prime due colonne della matrice A, vale a dire

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per passare alle equazioni cartesiane risolviamo il sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 3 & x_3 \end{array}\right),$$

che ridotto a scala diventa

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right).$$

L'immagine ha dunque equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

- Diamo al termine noto coordinate generiche $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

la cui matrice completa, ridotta a scala, è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right).$$

Il sistema ammette soluzione sse

$$\mathbf{b} \in \left\{ \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se $\mathbf{b}$ soddisfa tale proprietà, possiamo risolvere il sistema all'indietro. Ricaviamo la soluzione

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 + \frac{b+2a}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 - x_4 + \frac{b-a}{3} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = v + W,$$

dove $v = \begin{pmatrix} \frac{b+2a}{3} \\ \frac{b-a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e W è il $\ker(L_A)$.

$v + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.

- Una rappresentazione parametrica per Π è data da

$$\begin{cases} x = -2t + 3s + 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases}.$$

- Si ha
$$l_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \ : \ \mathrm{t} \in \mathbb{R} \right\},$$
$$l_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ : \ \mathrm{t} \in \mathbb{R} \right\}.$$
Le due rette sono parallele se e soltanto se i due vettori direttori sono linearmente indipendenti. Ci chiediamo dunque: esistono $a \in \mathbb{R}, \alpha$ e β non entrambi nulli t.c.
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$
Il sistema
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ a\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$
ammette la sola soluzione $\alpha = \beta = a = 0$, quindi possiamo dire che per nessun valore di a l_1 e l_2 sono parallele.
Le due rette sono perpendicolari se e soltanto se lo sono i due vettori direttori, vale a dire se e soltanto se è nullo il prodotto scalare fra di essi. L'equazione
$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} > = 2 + 3 - 2a = 0$$
ha soluzione $a = \frac{5}{2}$.
Dunque per $a = \frac{5}{2}$ le rette l_1 e l_2 sono perpendicolari.

- La retta l_1 è parallela a Π sse il suo vettore direttore è contenuto nel sottospazio generato dai vettori $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ci chiediamo: esistono $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ t.c.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Il sistema $\begin{cases} 1 = -2\alpha + 3\beta \\ 3 = \alpha \\ a = \beta \end{cases}$ ammette la soluzione $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = \frac{7}{3} \\ a = \frac{7}{3} \end{cases}$
Dunque per $a = \frac{7}{3}$ la retta l_1 è parallela a Π.

l_1 e Π sono perpendicolari se e solo se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ è ortogonale sia a $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sia a $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >= -2 + 3 \neq 0 \; \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dunque per nessun valore di a l_1 è ortogonale a Π.

- Abbiamo già verificato che per $a = 1$ le rette l_1 e l_2 non sono parallele. Per stabilire se si intersecano, dobbiamo risolvere il sistema nelle incognite t e s
$$\begin{cases} 2 + t = 1 + 2s \\ 1 + 3t = -1 + s \\ t = -2 - 2s. \end{cases},$$
la cui matrice completa, ridotta a scala, è
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{array}\right).$$
Il sistema è impossibile, quindi per $a = 1$ l_1 e l_2 sono sghembe.

- La distanza fra l'origine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ e l_1 è la distanza fra l_1 e la proiezione di $\mathbf{0}$ su di essa, che indichiamo con H. Allora, indicando con θ l'angolo fra $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$$\mathrm{d}(\mathbf{0}, H) = \mathrm{d}(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})\sqrt{1 - (\cos\theta)^2} = \|v_1\|\sqrt{1 - \frac{| < v_1, v_0) > |^2}{\|v_0\|^2 \cdot \|v_1\|^2}}$$
$$= \sqrt{(4+1) - \frac{(2+3)^2}{1+9+1}} = \sqrt{\frac{30}{11}}.$$