Matrici: determinanti e cambi di base

Esercizio 1. Dimostrare che non esistono due matrici A e B in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ (matrici a n colonne e n righe a valori reali) tali che $AB - BA = I_n$ dove I_n è la matrice identica a n colonne e n righe.

SOLUZIONE. Ricordiamo che la traccia di una matrice M (denotiamola $Tr(M)$) è la somma degli elementi sulla diagonale e che se A e B sono due matrici a n righe e n colonne allora

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$;
- $Tr(AB) = Tr(A) \cdot Tr(B)$.

Se A e B sono tali che $AB - BA = I_n$ allora $Tr(AB - BA)$ deve essere uguale a $Tr(I_n))$. Si noti adesso che $Tr(I_n) = n$ mentre $Tr(AB - BA) = Tr(A)Tr(B) - Tr(B)Tr(A) = 0$: dunque non esistono A e B che verificano l'equazione $AB - BA = I_n$.

Osservazione. Ricordiamo che per il determinante vale la formula di Binet: $Det(AB) = Det(A) \cdot Det(B)$, ma **non è vero** (in generale) che $Det(A+B) = Det(A) + Det(B)$. Ad esempio $I_n = E_{1,1} + \ldots + E_{n,n}$ dove $E_{j,j}$ è la matrice con tutte le entrate nulle salvo un 1 alla j-esima riga e j-esima colonna. È chiaro che $Det(I_n) = 1$ mentre $Det(E_{j,j}) = 0$ per ogni j.

$\blacksquare$

Esercizio 2. Sia $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ la matrice associata all'applicazione lineare L_A nella base canonica di $\mathbb{R}^4$. Dire se $\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e in caso positivo trovare la matrice A' che rappresenta L_A nella base $\mathcal{C}$. Determinare $kerL_A$.

SOLUZIONE. Se A è una matrice che rappresenta un'applicazione lineare in una base $\mathcal{B}$, la matrice di tale applicazione lineare in un'altra base $\mathcal{C}$ è

$$A' = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} \; A \; M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

dove $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{C}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (**verificare se la notazione è coerente con quella usata in corso**).

Nel nostro caso la base di partenza è quella canonica: quindi la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ (che denoteremo semplicemente con B) è la matrice ottenuta accostando i vettori della base di $\mathcal{C}$:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

.

Anzitutto verifichiamo che $\mathcal{C}$ é una base calcolando il determinante di B:

$$Det(B) = Det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-)^{3+4} 2 Det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-)^{1+1} . Det \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

Visto che il determinante è diverso da zero allora $\mathcal{C}$ é una base. Calcoliamo B^{-1}: ricordiamo che $Cof(B)$ è la matrice che al posto (i,j) ha il numero $(-)^{i+j} det B_{j,i}$ (Attenzione agli indici: calcoliamo il determinante del minore associato all'entrata (j,i) di B e lo mettiamo nell'entrata (i,j)!) e che $B^{-1} = (1/Det(B))Cof(B)$.

$$Cof(B) = \begin{vmatrix} 16 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & -4 & +8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$B^{-1} = (1/Det(B))Cof(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

Osservazione. Un altro modo per trovare la matrice inversa è stato dettagliato in tutorato e in esercitazioni.

Possiamo dunque concludere che

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3/2 & 1 & -2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Osservazione. Per verificare se la matrice ottenuta è corretta si può usare la matrice A per vedere dove sono inviati i vettori della base $\mathcal{C}$. Ad esempio, l'immagine di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Secondo la matrice A' il quarto vettore della base $\mathcal{C}$ è mandato in

$$8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

e l'ultima colonna della matrice A' è corretta. Procedendo allo stesso modo per gli altri vettori che compongono la base $\mathcal{C}$ si possono verificare le altre colonne di A'.

Infine $kerL_A$ si riduce al vettore nullo. Per dimostrarlo basta calcolare il determinante di A (o anche di A') e verificare che è differente da 0. Quindi il rango di A (e quindi la dimensione di ImL_A) è 4. Il teorema del rango e della dimensione ci permette di concludere che $dim(kerL_A) = 0$. ∎