Matrici e sistemi lineari II

Esercizio 1.

Sia L_A l'applicazione lineare definita su $\mathbb{R}^3$ e a valori in $\mathbb{R}^3$ di cui la matrice rispetto alla basi canonica di $\mathbb{R}^3$ (vale a dire la matrice delle immagini della base canonica di $\mathbb{R}^3$) è la seguente:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Trovare le soluzioni del sistema omogeneo (vale a dire $KerL_A$);
2. Determinare tutti i vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che il sistema $Ax = u$ è compatibile (vale a dire ImL_A);
3. Trovare le preimmagini del vettore $(2, 1, 2)$. La preimmagine del vettore è un sottospazio affine; quale è la relazione con $KerL_A$?

SOLUZIONE.

1. Risolvendo il sistema omogeneo

   $$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   troviamo immediatamente che la soluzione è data dalla retta

   $$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

   Riscrivendo il tutto in forma parametrica possiamo quindi dire che $KerL_A$ (che coincide con la soluzione del sistema) è lo Span del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si noti che $x = -y$).

2. Determinare tutti i vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che il sistema $Ax = u$ è compatibile corrisponde a determinare ImL_A; il teorema del rango ci permette

di affermare che la dimensione di ImL_A è 2; come base possiamo prendere le immagini dei vettori $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$, vale a dire $(1,0,0)$ e $(0,1,2)$, che sono chiaramente indipendenti.

Possiamo quindi concludere che un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ è tale che il sistema $Ax = u$ è compatibile se e solo se appartiene a $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

3. Le preimmagini di $(2,1,2)$ sono le soluzioni del sistema

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

Applicando Rouché - Capelli troviamo che le soluzioni formano una retta e in particolare la soluzione è data dalla retta R:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Se la esprimiamo in forma parametrica, troviamo il sottospazio affine $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e osserviamo dunque che la preimmagine di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un traslato (un parallelo) di $KerL_A$.

∎