Matrici e sistemi lineari

Esercizio 1. Risolvere il sistema lineare seguente al variare dei parametri a e b.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ ax + ay + bz = 0 \\ 2x + y - z = b \end{cases}$$

SOLUZIONE.

La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & a & b \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

mentre la matrice estesa è

$$C = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & a & b & 0 \\ 2 & 1 & -1 & b \end{array}\right|$$

Riduciamo la matrice estesa: sostraendo alla seconda riga a volte la prima e sostraendo alla terza 2 volte la prima troviamo la matrice seguente:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+b & -a \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \end{array}\right|$$

e scambiando la terza e la seconda riga otteniamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \\ 0 & 0 & a+b & -a \end{array}\right|$$

Osservazione. Le operazioni eseguite non hanno cambiato il rango (Rg) della matrice e della matrice estesa. Quindi potremo parlare ancora di $Rg(A)$ e $Rg(C)$ anche se le matrici ottenute sono differenti da A e C.

Si noti adesso che il primo e il secondo vettore colonna della matrice a scala non dipendono da a e b. Abbiamo quindi due casi possibili: $Rg(A) = 2$ e $Rg(A) = 3$. Distinguiamo quindi questi due casi:

1. $Rg(A) = 2$ se e solo se $a + b = 0$; altrimenti il terzo vettore colonna sarebbe indipendete dai primi due. Per applicare Rouchè-Capelli dobbiamo sapere quale è il rango della matrice estesa C. Abbiamo quindi due sottocasi:

(a) $Rg(C) = 2$ se e solo se $a = 0$; altrimenti il quarto vettore colonna sarebbe indipendente dai primi due. Visto che $a + b = 0$ allora anche $b = 0$ e quindi siamo nel caso $a = b = 0$ e la matrice e il sistema associati sono :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha un'infinità di soluzioni dipendenti da un parametro. Ponendo ad esempio $z = t$, troviamo dalla seconda che $y = t + 2$ e infine $x = 1$. Quindi la soluzione del sistema è la retta di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases}$$

(b) Supponiamo adesso che $a \neq 0$; allora $2 = Rg(A) \neq Rg(C) = 3$. Dal teorema di Rouché-Capelli deduciamo quindi che il sistema non ha soluzioni per $a = -b$ e $a \neq 0$.

2. Passiamo adesso al caso $a + b \neq 0$ vale a dire al caso $Rg(A) = 3$. Quindi $Rg(A) = Rg(C) = 3$, dove 3 è anche il numero di incognite del sistema.

   Dal Teorema di Rouché-Capelli deduciamo quidi che esiste una ed una sola soluzione. In questo caso la matrice a scala e il sistema ridotto sono

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b - 2 \\ 0 & 0 & a + b & -a \end{array}\right| \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + z = b - 2 \\ (a + b)z = -a \end{cases}$$

   Dalla terza equazione troviamo $z = \frac{-a}{a+b}$, dalla seconda $y = \frac{a+2b-ab-b^2}{a+b}$ e infine dalla prima $x = b - 1$.

   Osservazione. Abbiamo trovato che per $a \neq -b$ il sistema ammette una ed una sola soluzione. La soluzione chiaramente dipende da due parametri, a e b, ma quando questi sono fissati (con $a \neq -b$) si ha una ed una sola soluzione.

$\blacksquare$