

## Spazi Vettoriali e applicazioni lineari

**Esercizio 1.** Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad W = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si trovino delle basi per  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$  e  $U + W$ .

SOLUZIONE. I vettori che definiscono  $U$  sono indipendenti e quindi possono essere presi come base di  $U$ . Lo spazio  $W$  potrebbe essere visto come uno sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  visto che il secondo e il terzo coefficiente sono nulli per ognuno dei tre vettori e dunque la dimensione di  $W$  è al più 2. Una semplice verifica mostra che il primo vettore è ottenuto come differenza del secondo e del terzo vettore che quindi possono essere presi come base di  $W$  in quanto linearmente indipendenti.

Dalla formula di Grassman deduciamo quindi che  $\dim U \cap W + \dim(U + W) = 2 + 2 = 4$  Per trovare  $U \cap W$  bisogna cercare tutti i vettori che sono

contemporaneamente nello  $\text{Span}$  di  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e di  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e quindi risolvere il

sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 3\mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 2\mu_1 + \mu_2 \end{cases}$$

Se un vettore di  $U$  appartiene a  $U \cap W$  allora deve avere secondo e terzo coefficiente uguali a zero e quindi  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .

Quindi  $\text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \supseteq U \cap W$ ; una semplice verifica mostra che  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in$

$W$  e dunque anche l'altra inclusione è vera e  $\text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \equiv U \cap W$  e

chiaramente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è una base per  $U \cap W$ .

Dalla formula di Grassman deduciamo quindi che  $\dim(U+V) = 4-1 = 3$ . Come base di tale spazio possiamo prendere i due vettori della base di  $W$  e uno della base di  $U$ . Per quanto detto qui sopra infatti è chiaro che un elemento della base di  $U$  non può appartenere a  $W$ . ■

**Esercizio 2.** Siano  $E, F, G$  tre  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali e siano  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  due applicazioni lineari. Si mostri che se  $\ker g \circ f = \ker f$  allora  $\ker g \cap \text{Im} f = O_F$ .

SOLUZIONE. Sia  $x$  un vettore di  $F$ ; se  $x \in \ker g \cap \text{Im} f$  allora  $g(x) = 0$  ed esiste  $y \in E$  t.c  $f(y) = x$ .e quindi  $g(x) = g(f(y)) = 0$ . Per ipotesi allora  $y \in \ker f$ : dunque  $x = f(y) = 0$  e abbiamo quindi dimostrato l'implicazione.

**Osservazione.** Si noti che è sempre vera l'inclusione  $\ker g \circ f \supseteq \ker f$ . ■