Geometria Euclidea

Esercizio . Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}^2$ la posizione reciproca di

$$r_k : \begin{cases} x = t_1 \\ y = kt_1 \\ z = t_1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x + y + z + k = 0 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

e, se esiste, determinare il piano passante per le dure rette.

SOLUZIONE. Cerchiamo anzitutto le intersezioni tra r_k e s_k, che denoteremo $r_k \cap s_k$. Per trovare $r_k \cap s_k$ basta sostituire le equazioni parametriche di r_k nelle equazioni cartesiane di s_k; in questo modo in effetti determiniamo tutti i punti che soddifano le eq.parametriche di r_k e le equazioni cartesiane di s_k.

$$r_k \cap s_k : \begin{cases} t_1 + kt_1 + t_1 + k = 0 \\ t_1 + 2t_1 = 3 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deduciamo che $t_1 = 1$ e dalla seconda quindi che $k+2+k = 0$; il sistema è dunque incompatibile per $k \neq -1$ (e quindi r_k e s_k sono sghembe o parallele) ed ammette una ed una sola soluzione per $k = -1$. In particolare, per $k = -1$, la soluzione è $t_1 = 1$ e quindi sostituendo tale valore nelle equazioni di r_k otteniamo che il punto di intersezione tra r_k e s_k è il punto $P_1 = (1, -1, 1)$.

Nel caso $k \neq -1$ scriviamo delle equazioni parametriche per s_k:

$$s_k : \begin{cases} x = t_2 \\ y = -\frac{t_2+3}{2} - k \\ z = \frac{3-t_2}{2} \end{cases}$$

o anche, per $t_3 = 2t_2 + 1$,

$$s_k : \begin{cases} x = 2t_3 + 1 \\ y = -t_3 - 2 - k \\ z = -t_3 + 1 \end{cases} \quad .$$

Notiamo che il vettore direttore di s_k è sempre proporzionale al vettore $v_{s_k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'altra parte il vettore direttore di r_k è proporzionale a $v_{r_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi s_k non è mai parallela ad r_k (v_{s_k} e v_{r_k} non sono proporzionali) e in particolare per $k \neq 1$, r_k e s_k sono sghembe.

Si noti che potevamo concludere semplicemente notando che il parametro k appariva solo in una delle due equazioni parametriche di s_k e quindi tutti le rette s_k erano parallele essendo ottenute come intersezioni dei piani $\pi_k : x+y+z+k=0$ (tutti paralleli tra loro) con il piano $\pi_0 : x+2z=0$.

Infine, determiniamo il (solo) piano $\pi_{r,s}$ passante per r_{-1} ed s_{-1}: usando la forma parametrica di s_k basta prendere i vettori direttori delle due rette r_{-1} ed s_{-1} più la loro intersezione:

$$\pi_{r,s} : \begin{cases} x = t_1 + 2t_3 + 1 \\ y = -t_1 - t_3 - 1 \\ z = t_1 - t_3 + 1 \end{cases}$$

Se volevamo invece il piano in forma parametrica potevamo procedere almeno ad esempio calcolando il prodotto vettoriale $v_{\hat{rs}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dei vettori direttori delle due rette r_{-1} ed s_{-1}, che è un vettore perpendicolare al nostro piano. Quindi il piano $\pi_{r,s}$ ha equazione parametrica $2x+3y+z+d=0$ (come coefficienti di giacitura possiamo prendere i coefficienti del vettore perpendicolare al piano) dove il parametro d può essere determinato imponendo il passaggio per P_1 (ovvero $d = -2+3-1 = 0$).

Altrimenti potevamo passare dalla forma parametrica alla forma cartesiana trovando le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = t_1 + 2t_3 + 1 \\ y = -t_1 - t_3 - 1 \\ z = t_1 - t_3 + 1 \end{cases}$$

per cui troviamo: $\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1-x \\ -1 & -1 & 1-y \\ 1 & -1 & 1-z \end{array}\right| \rightarrow^{1} \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1-x \\ 0 & 1 & -x-y \\ 0 & -3 & x-z \end{array}\right|$

$\rightarrow^{2} \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1-x \\ 0 & 1 & -x-y \\ 0 & 0 & -2x-3y-z \end{array}\right|$

per cui un'equazione cartesiana è $-2x-3y-z=0$ (si noti che tale piano coincide con $2x+3y+z=0$!).

∎

[1] seconda riga meno prima; terza riga meno prima
[2] terza riga meno 3xseconda