

VERSIONE B

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di \mathbb{R}^3 e sia $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$, ove $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 + e_3$.

1. Dimostrare che \mathcal{D} è una base di \mathbb{R}^3 .
2. Spiegare perchè esiste ed è unica $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $f\left((1, 0, -1)^t\right) = (\pi, 0, -\pi)$, $f\left((1, -1, 0)^t\right) = (-3, 0, -3)^t$, $f\left((1, 0, 1)^t\right) = (2, -2, 0)^t$; determinare la matrice di f nella base \mathcal{D} , $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$.
3. Determinare il rango di f , la traccia e il determinante di f e i suoi autovalori; stabilire se f è diagonalizzabile.
4. Determinare la matrice di f nella base canonica, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

Esercizio 2. Sia $\psi(X, Y) =: X^t B Y$ ($X, Y \in \mathbb{R}^3$), ove

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si dimostri che ψ è un prodotto scalare e se ne trovino le matrici nella base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ e nella base $\mathcal{D} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.
2. Trovare gli autovalori di B e una base \mathcal{F} di \mathbb{R}^3 ortonormale per il prodotto scalare standard costituita da autovettori di B .
3. Trovare una base di \mathbb{R}^3 ortogonale per ψ .
4. Determinare spazio nullo, nullità e indice di positività di ψ .

Esercizio 3. Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y + 2z \\ -x + y + 3z \\ x + 2y \\ x - y - 3z \end{pmatrix}.$$

1. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\ker(g) \subseteq \mathbb{R}^3$, e una base per il suo annullatore $\ker(g)^0 \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ (specificare '??');
2. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\text{Im}(g)$;
3. Descrivere parametricamente la controimmagine $\ell =: g^{-1}\left((2, 3, 0, -3)^t\right)$ (se non vuota), esibendola come sottospazio affine di \mathbb{R}^3 .
4. Trovare la distanza (rispetto alla norma Euclidea standard) tra ℓ e $(0, 1, 0)^t$.