

VERSIONE A

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Sia $\varphi(X, Y) =: X^t A Y$ ($X, Y \in \mathbb{R}^3$), ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si dimostri che φ è un prodotto scalare e se ne trovino le matrici nella base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ e nella base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.
2. Trovare gli autovalori di A e una base \mathcal{D} di \mathbb{R}^3 ortonormale per il prodotto scalare standard costituita da autovettori di A .
3. Trovare una base di \mathbb{R}^3 ortogonale per φ .
4. Determinare spazio nullo, nullità e indice di positività di φ .

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2y + 2z \\ x - y - 3z \\ -x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

1. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, e una base per il suo annullatore $\ker(f)^0 \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ (specificare '??');
2. Determinare basi ed equazioni Cartesiane per $\text{Im}(f)$;
3. Descrivere parametricamente la controimmagine $\ell =: f^{-1}\left((1, 0, 1, -1)^t\right)$ (se non vuota), esibendola come sottospazio affine di \mathbb{R}^3 .
4. Trovare la distanza (rispetto alla norma Euclidea standard) tra ℓ e $(0, 1, 0)^t$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di \mathbb{R}^3 e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, ove $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 - e_3$.

1. Dimostrare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^3 .
2. Spiegare perchè esiste ed è unica $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^t$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^t\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t$; determinare la matrice di f nella base \mathcal{B} , $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.
3. Determinare il rango di f , la traccia e il determinante di f e i suoi autovalori; stabilire se f è diagonalizzabile.
4. Determinare la matrice di f nella base canonica, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.