

VERSIONE B

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1.

1. Sia $g \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$ con $\dim \ker(g) = 2$ e autovalore 6 con molteplicità geometrica tre; g è necessariamente diagonalizzabile? Dimostrare o confutare con controesempio.
2. Sia $g \in \text{End}(\mathbb{R}^6)$ con polinomio caratteristico $p_f(X) = (x - 4)^3 x (x + 1)^2$. Quali sono gli autovalori di g e le loro possibili molteplicità geometriche?
3. Rispondere alla stessa domanda sapendo in aggiunta che $g = L_B : X \mapsto BX$ con $B = B^t$.
4. Dare un esempio esplicito per ogni possibilità elencata in 2 (ora senza l'ipotesi di simmetria).

Esercizio 2. Sia

$$T =: \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- Trovare la dimensione di T ed equazioni Cartesiane per T .
- Trovare una base ortonormale di T per il prodotto scalare standard.
- Trovare una base per l'annullatore $T^0 \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$ (anche denotato $\text{perp}_{(\mathbb{R}^4)^*}(T)$).
- Trovare una base ortonormale per il complemento ortogonale $T^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ di T rispetto al prodotto scalare standard.

Esercizio 3. Siano R e S spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} , aventi dimensione c e d rispettivamente, e siano \mathcal{R} e \mathcal{S} basi di R e S .

- Definire la matrice di un'applicazione lineare $\sigma : R \rightarrow S$ rispetto alle basi \mathcal{R} e \mathcal{S} .
- Si dimostri che la corrispondenza appena descritta definisce un isomorfismo tra $\mathcal{L}(R, S) = \text{Hom}(R, S)$ e lo spazio delle matrici $?_1 \times ?_2$ (specificare).
- Dare la definizione di autovalore e autovettore di $\gamma \in \text{End}(R)$ e spiegare cosa significa che $\gamma \in \text{End}(R)$ è diagonalizzabile.
- Dimostrare che $\gamma \in \text{End}(R)$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a γ nella base \mathcal{R} è simile a una matrice diagonale.

Esercizio 4. Sia R uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} , di dimensione finita c .

- Si dia la definizione di prodotto scalare su R , di spazio nullo di un prodotto scalare $\psi = \langle , \rangle$ (denotato $V^{\perp\psi}$), di prodotto scalare non degenerare.
- Se $\psi = \langle , \rangle$ è un prodotto scalare su V , si dimostri che ψ induce un'applicazione lineare $L : R \rightarrow R^*$ e che ψ è non degenerare se e solo se L è un isomorfismo.
- Se $T \subseteq R$ è un sottospazio vettoriale, si definiscano l'annullatore $T^0 \subseteq R^*$ (anche denotato $\text{perp}_{R^*}(T)$) e il complemento ortogonale di T rispetto a ψ , $T^{\perp\psi}$.
- Si dimostri che se ψ è non degenerare allora L induce un isomorfismo tra $T^{\perp\psi}$ e T^0 .