

VERSIONE A

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} , aventi dimensione m e n rispettivamente, e siano \mathcal{B} e \mathcal{D} basi di V e W .

- Definire la matrice di un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{D} .
- Si dimostri che la corrispondenza appena descritta definisce un isomorfismo tra $\mathcal{L}(V, W) = \text{Hom}(V, W)$ e lo spazio delle matrici ${}_{1} \times {}_{2}$ (specificare).
- Dare la definizione di autovalore e autovettore di $g \in \text{End}(V)$ e spiegare cosa significa che $g \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile.
- Dimostrare che $g \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a g nella base \mathcal{B} è simile a una matrice diagonale.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} , di dimensione finita d .

- Si dia la definizione di prodotto scalare su V , di spazio nullo di un prodotto scalare φ (denotato $V^{\perp\varphi}$), di prodotto scalare non degenere.
- Se $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su V , si dimostri che φ induce un'applicazione lineare $L : V \rightarrow V^*$ e che φ è non degenere se e solo se L è un isomorfismo.
- Se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, si definiscano l'annullatore $W^0 \subseteq V^*$ (anche denotato $\text{perp}_{V^*}(W)$) e il complemento ortogonale di W rispetto a φ , $W^{\perp\varphi}$.
- Si dimostri che se φ è non degenere allora L induce un isomorfismo tra $W^{\perp\varphi}$ e W^0 .

Esercizio 3.

1. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ con $\dim \ker(f) = 2$ e autovalore 2 con molteplicità geometrica due; f è necessariamente diagonalizzabile? Dimostrare o confutare con controesempio.
2. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$ con polinomio caratteristico $p_f(X) = (x-1)^3(x-3)^2$. Quali sono gli autovalori di f e le loro possibili molteplicità geometriche?
3. Rispondere alla stessa domanda sapendo in aggiunta che $f = L_A : X \mapsto AX$ con $A = A^t$.
4. Dare un esempio esplicito per ogni possibilità elencata in 2 (ora senza l'ipotesi di simmetria).

Esercizio 4. Sia

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

1. Trovare la dimensione di W e equazioni Cartesiane per W .
2. Trovare una base ortonormale di W per il prodotto scalare standard.
3. Trovare una base per l'annullatore $W^0 \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$ (anche denotato $\text{perp}_{(\mathbb{R}^4)^*}(W)$).
4. Trovare una base ortonormale per il complemento ortogonale $W^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ di W rispetto al prodotto scalare standard.