Compitino di algebra lineare e geometria del 30 Novembre 2007

VERSIONE B

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

Esercizio 1.

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale.
- Sia T uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano R, $S \subseteq T$ sottospazi vettoriali; si definiscano i sottospazi somma e intersezione.
- Si dimostri esplicitamente che lo spazio intersezione è effettivamente un sottospazio vettoriale di T.
- Supponendo $\dim(R)$, $\dim(S) < +\infty$, si enunci la relazione che intercorre tra $\dim(R)$, $\dim(S)$, $\dim(R+S)$, $\dim(R\cap S)$.
- Si dimostri la relazione di cui sopra.

Esercizio 2. Sia $c \in \mathbb{R}$ un parametro e siano s_1, s_2, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$\Gamma =: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 2y - 3z = -2 \right\},$$

$$s_1 =: \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s_2 =: \left\{ \begin{pmatrix} 2+ct \\ t \\ 3+ct \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Si determini una rappresentazione parametrica per Γ.
- Al variare di c, stabilire se s_1 e s_2 sono parallele o perpendicolari.
- Al variare di c, stabilire se s_2 è parallela a Γ o perpendicolare a Γ.
- Al variare di c, stabilire se s_1 e s_2 sono sghembe (disgiunte) o incidenti.
- Per $c = 0$, trovare la distanza tra s_2 e l'origine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.

- Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
- Data un'applicazione lineare $f : W \to V$, dare la definizione di nucleo (ker) e di sottospazio immagine.
- Si dimostri esplicitamente che lo spazio immagine è effettivamente un sottospazio vettoriale di ? (specificare chi è ?).
- Supposto $\dim(W) < +\infty$, si enunci la relazione che lega $\dim \ker(f)$ e $\dim \operatorname{im}(f)$.
- Si dimostri la relazione precedente.

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Studiare il sistema lineare $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, al variare del termine noto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ (specificare l!), cioè:

- Determinare basi ed equazioni Cartesiane dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (vale a dire, del nucleo $\ker(L_A)$, ove L_A è l'applicazione lineare associata).
- Determinare dimensione, basi ed equazioni Cartesiane dello spazio dei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^?$ per i quali il sistema è risolubile (vale a dire, del sottospazio immagine $\operatorname{im}(L_A)$ dell'applicazione lineare L_A).
- Al variare del termine noto $\mathbf{b}$, si determini lo spazio delle soluzioni (vale a dire, l'immagine inversa $L_A^{-1}(\mathbf{b})$ di $\mathbf{b}$). In particolare, nei casi in questo è non vuoto, lo si esprima *esplicitamente* come un sottospazio affine di $\mathbb{R}^{??}$ (specificare!), vale a dire come traslato $v + U$ di un certo sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^{??}$ (descrivendo quindi esplicitamente v e U).