

VERSIONE A

Nome e cognome:

Matricola:

Attenzione: riportare i dati personali su ogni foglio consegnato

**Esercizio 1.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Studiare il sistema lineare  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , al variare del termine noto  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  (specificare ?), cioè:

- Determinare dimensione, basi ed equazioni Cartesiane dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo  $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$  (vale a dire, del nucleo  $\ker(L_A)$ , ove  $L_A$  è l'applicazione lineare associata).
- Determinare dimensione, basi ed equazioni Cartesiane dello spazio dei  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  per i quali il sistema è risolubile (vale a dire, del sottospazio immagine  $\text{im}(L_A)$  dell'applicazione lineare  $L_A$ ).
- Al variare del termine noto  $\mathbf{b}$ , si determini lo spazio delle soluzioni (vale a dire, l'immagine inversa  $L_A^{-1}(\mathbf{b})$  di  $\mathbf{b}$ ). In particolare, nei casi in questo è non vuoto, lo si esprima *esplicitamente* come un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^{??}$  (specificare!), vale a dire come traslato  $v + W$  di un certo sottospazio vettoriale  $W$  di  $\mathbb{R}^{??}$  (descrivendo quindi esplicitamente  $v$  e  $W$ ).

**Esercizio 2.**

- Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ .
- Data un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$ , dare la definizione di nucleo ( $\ker$ ) e di sottospazio immagine.
- Si dimostri esplicitamente che il nucleo è effettivamente un sottospazio vettoriale di ? (specificare chi è ?).

- Supposto  $\dim(V) < +\infty$ , si enunci la relazione che lega  $\dim \ker(f)$  e  $\dim \operatorname{im}(f)$ .
- Si dimostri la relazione precedente.

**Esercizio 3.** Sia  $a \in \mathbb{R}$  un parametro e siano  $\ell_1, \ell_2, \Pi \subseteq \mathbb{R}^3$  definiti da:

$$\ell_1 =: \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 1+3t \\ at \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \ell_2 =: \left\{ \begin{pmatrix} 1+2t \\ -1+t \\ -2-2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Pi =: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - 3z = 1 \right\}.$$

- Si determini una rappresentazione parametrica per  $\Pi$ .
- Stabilire per quali valori di  $a$   $\ell_1$  e  $\ell_2$  sono parallele o perpendicolari.
- Stabilire per quali valori di  $a$   $\ell_1$  è parallela a  $\Pi$  o perpendicolare a  $\Pi$ .
- Per  $a = 1$ , stabilire se  $\ell_1$  e  $\ell_2$  sono sghembe (disgiunte) o incidenti.
- Per  $a = 1$ , trovare la distanza tra  $\ell_1$  e l'origine  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 4.**

- Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale.
- Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$  e siano  $U, W \subseteq V$  sottospazi vettoriali; si definiscano i sottospazi somma e intersezione.
- Si dimostri esplicitamente che lo spazio somma è effettivamente un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- Supponendo  $\dim(U), \dim(W) < +\infty$ , si enunci la relazione che intercorre tra  $\dim(U), \dim(W), \dim(U+W), \dim(U \cap W)$ .
- Si dimostri la relazione di cui sopra.