

**Esercizi su derivate differenziabilità e piano tangente in  $\mathbf{R}^2$ -  
prof. B.Bacchelli**

Riferimenti: R.Adams, Calcolo Differenziale 2. Capitoli 3.3, 3.6, 3.7. -  
Esercizi 3.3, 3.2.

*L'esistenza delle derivate direzionali non implica la continuità.*

Per esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f(0, y) = 0 \rightarrow 0$ ,  $f(y^2, y) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow f$  non è continua in  $(0, 0)$ , anche se per ogni direzione  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , esiste la derivata direzionale:

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h^2(v_1^2 + h^2 v_2^4)} = 0$$

*Equazione del piano tangente.* Se  $f$  è differenziabile in  $(a, b)$ , il piano di equazione

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

è l'equazione del piano tangente alla superficie  $z = f(x, y)$  nel suo punto  $\mathbf{P} = (a, b, f(a, b))$ . Esso è la *linearizzazione* della funzione in un intorno del punto  $\mathbf{P}$ .

**Esempio.** *Trovare un valore approssimato della funzione  $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$  nel punto  $\mathbf{P} = (3.1, 2.9)$ .*

Il punto  $P$  si può scrivere come  $\mathbf{P} = (3, 3) + (0.1, -0.1)$ . Detti  $\mathbf{a} = (3, 3)$  e  $\mathbf{y} = (0.1, -0.1)$  si ha

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{y}) \simeq f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \mathbf{y}$$

Ora,  $f(3, 3) = \arctan(1) = \pi/4$ ,  $\nabla f(3, 3) = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ , quindi  $\nabla f(\mathbf{a}) \mathbf{y} = -\frac{1}{30}$ , e

$$f(\mathbf{P}) \simeq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{30} \simeq \frac{(3.14) \cdot 15 - 2}{60} \simeq 0.75$$

Esercizi

\* Data  $f(x, y) = x^2 \sin(3xy)$ , calcolare le derivate parziali e la derivata nella direzione del vettore  $n = (2, -1)$  nel punto  $(1, \frac{\pi}{4})$

$$f_x = 2x \sin(3xy) + 3yx^2 \cos(3xy) \quad , \quad f_y = 3x^3 \cos(3xy)$$

$$f_x(1, \frac{\pi}{4}) = 2 \sin(\frac{3\pi}{4}) + \frac{3\pi}{4} \cos(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}, \quad f_y(1, \frac{\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

Il versore parallelo a  $\mathbf{n}$  è  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

$$\text{e } D_{\mathbf{v}}(1, \frac{\pi}{4}) = \nabla f(1, \frac{\pi}{4}) \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

\* Data  $f(x, y) = e^{y/x} + xy + 2$ , scrivere l'equazione del piano tangente in  $(1, 0, f(1, 0))$  e calcolare la derivata nelle direzioni parallele alla retta di equazione  $y = 3(x - 1)$  nel punto  $(1, 0)$

$$f(1, 0) = 3, \quad f_x = e^{y/x}(-\frac{y}{x^2}) + y, \quad f_y = e^{y/x} \frac{1}{x} + x \Rightarrow \nabla f(1, 0) = (0, 2)$$

l'equazione del piano tangente è quindi  $z = 3 + 2y$ . I versori nella direzione della retta  $y = 3x - 3$  sono  $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ ,  $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ , quindi

$$D_{\mathbf{v}_1}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{6}{\sqrt{10}}, \quad D_{\mathbf{v}_2}(1, 0) = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

\* Data  $f(x, y) = (x^2 - 1)^{y^2+1}$ , scrivere l'equazione del piano tangente in  $(2, -1, f(2, -1))$ , e calcolare la derivata direzionale lungo il versore  $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$f(2, -1) = 9,$$

$$f_x = (y^2 + 1) 2x \Rightarrow f_x(2, -1) = 24$$

$$f_y = (x^2 - 1)^{y^2+1} 2y \log(x^2 - 1) \Rightarrow f_y(2, -1) = -18 \log 3$$

l'equazione del piano tangente è quindi  $z = 9 + 24(x - 2) - 18 \log 3(y + 1)$ ;

la derivata richiesta è  $D_{\mathbf{v}}f(2, -1) = (24, -18 \log 3) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(12 - 9 \log 3)$

$$* \text{ Sia } f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = \{(0, y) \cup (x, 0)\} \\ 0, & \text{altro} \end{cases}$$

verificare che  $f$  ha vettore gradiente in  $(0,0)$  ma  $f$  non è continua in  $(0,0)$ .

$$* \text{ Sia } f(x, y) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{3x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1)  $f$  è continua in  $(0,0)$ ?

2) Stabilire se esistono le derivate parziali in  $(0,0)$

3)  $f$  è differenziabile in  $(0,0)$ ?

$$1) |f(x, y)| \leq x^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0, 0) \\ \Rightarrow f \text{ è continua}$$

$$2) \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}(3x^2 + y^2)}$$

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}(3x^2 + y^2)} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$\Rightarrow f$  è differenziabile in  $(0,0)$ .

$$* \text{ Sia } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (0, 0) \end{cases}$$

1)  $f$  è continua in  $(0,0)$ ?

2) Stabilire se esiste la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$  lungo un generico versore  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

3)  $f$  è differenziabile in  $(0,0)$ ?

$$1) |f(x, y)| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0, 0) \\ \Rightarrow f \text{ è continua}$$

$$2) D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0, 0)}{h} = v_1^3 - v_2^3 \\ \Rightarrow D_{\mathbf{v}}f(0, 0) \text{ esiste per ogni } \mathbf{v}.$$

3) Poichè  $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$  non è una espressione lineare delle componenti di  $\mathbf{v}$ , allora  $f$  non è differenziabile in  $(0,0)$ .

\* Sia  $f(x, y) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{(x-y)^2}, & (x, y) \neq (x, x) \\ 0, & x = y \end{cases}$

1)  $f$  è continua in  $(0,0)$ ?

2) Stabilire se esistono le derivate parziali in  $(0,0)$

3)  $f$  è differenziabile in  $(0,0)$ ?

1)  $f(x, x + x^3) = \frac{x^5 + x^6}{x^6} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^6} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow f$  non è continua.

(Si osservi che la restrizione di  $f$  alle rette  $y = mx$  è funzione continua.

2)  $f(x, 0) = f(0, y) = 0 \Rightarrow$  esiste  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

3) Poichè  $f$  non è continua in  $(0,0)$ ,  $f$  non è differenziabile in  $(0,0)$ .

**Esempio** in cui le derivate parziali seconde miste sono diverse tra loro.

Sia  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

ponendo  $x = 0$  si ha  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ , da cui  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ ;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

ponendo  $y = 0$  si ha  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ , da cui  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ .