LEZIONE DI MD DEL 30.11.09

Riprendiamo la composizione di funzioni.

Def Date due funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to C$ definiamo la funzione composta "g dopo f" come la funzione $g \circ f: A \to C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Abbiamo visto che la composizione di funzioni è associativa cioè

PROPOSIZIONE 1

Siano $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: C \to D$ tre funzioni. Allora

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad \square$$

PROPOSIZIONE 2

Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni. Allora

1) se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva
2) se f e g sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva
3) se f e g sono biiettive allora $g \circ f$ è biiettiva

Dim.

Chiaramente il punto tre segue dai punti 1) e 2).

Dimostriamo il punto 1) Se f e g sono entrambe iniettive dobbiamo dimostrare che $g \circ f$ è iniettiva.
Ora $g \circ f : A \to C$ così siano $a_1, a_2 \in A$ con

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$$

e facciamo vedere che $a_1 = a_2$.
Risulta

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2).$$

Siccome g è iniettiva deve essere $f(a_1) = f(a_2)$.
Ma anche f è iniettiva dunque $a_1 = a_2$.

Per il punto 2) sia $c \in C$ dobbiamo far vedere che esiste $a \in A$ tale che $(g \circ f)(a) = c$.
Siccome $g : B \to C$ è suriettiva esiste $b \in B$ t.c. $g(b) = c$. Siccome f è suriettiva esiste $a \in A$ t.c. $f(a) = b$. Ma allora

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c \quad \square$$

Osservazione importante

Se ho due funzioni $f : A \to A$ e $g : A \to A$ posso considerare $g \circ f$ e $f \circ g$. In generale risulta $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio

$A = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{lll} f: A & \to & A \\ 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} g: A & \to & A \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

Allora

$$\begin{array}{lll} g \circ f: A & \to & A \\ 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{lll} f \circ g: A & \to & A \\ 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 3 \end{array}$$

RELAZIONI SU UN INSIEME

Def Sia A un insieme. Una relazione R su A è una corrispondenza di A in A ovvero R è un sottoinsieme di $A \times A$.

Data R relazione su A per dire che $(a,b) \in R$ si scrive anche aRb.

PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI

Una relazione R su A si dice

(1) RIFLESSIVA se $\forall a \in A \quad (a,a) \in R$

② <u>SIMMETRICA</u> se $\forall a, b \in A$ se $(a,b) \in R$ allora $(b,a) \in R$

③ <u>ANTISIMMETRICA</u> se $\forall a, b \in A$ se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ allora $a = b$.

④ <u>TRANSITIVA</u>: se $\forall a, b, c \in A$ se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ allora $(a,c) \in R$.

<u>Esempi</u>

1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,d), (d,c), (a,c), (c,a), (d,a), (c,d)\}$

R è riflessiva, simmetrica e transitiva

2) A insieme qualsiasi, R la relazione di "uguaglianza" definita da $(a,b) \in R$ se e solo se $a = b$ è riflessivo: $\forall a \in A$, $(a,a) \in R$ poiché $a = a$; simmetrica: $\forall a, b \in A$, se $(a,b) \in R$ $a = b$ così $(b,a) \in R$; antisimmetrica: $\forall a, b \in R$ se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ allora $a = b$; transitivo: $\forall a, b, c \in A$ se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ allora $a = b$ e $b = c$

dunque $a=c$ e $(a,c)\in R$.

La relazione di uguaglianza è così contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica.

3) $A=\{1,2,3\}$

$$R=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

Allora

1) R non è riflessiva perché $(3,3)\notin R$
2) R non è simmetrica perché $(2,3)\in R$ ma $(3,2)\notin R$
3) R non è antisimmetrica perché $(1,2)\in R$, $(2,1)\in R$ ma $1\neq 2$.
4) R non è transitiva perché $(1,2)\in R$, $(2,3)\in R$ ma $(1,3)\notin R$