LEZIONE DI MD DEL 01.02.10 — Appunti aggiornati [1] Email

RETICOLI

Def. Un insieme ordinato $(L, \leq)$ si dice un reticolo se $\forall x, y \in L$ esistono <u>in L</u> $\inf\{x,y\}$ e $\sup\{x,y\}$.

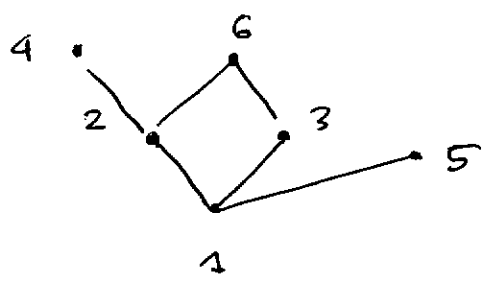
In simboli poniamo $\inf\{x,y\} = x \wedge y$ e $\sup\{x,y\} = x \vee y$.
La definizione precedente si riscrive:

Def. Un insieme ordinato $(L, \leq)$ si dice un reticolo se $\forall x, y \in L$ esistono $x \wedge y \in L$ e $x \vee y \in L$ tali che

1. $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$
2. $\forall z \in L$ se $z \leq x$ e $z \leq y$ si ha $z \leq x \wedge y$
3. $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$
4. $\forall z \in L$ se $x \leq z$ e $y \leq z$ allora $x \vee y \leq z$.

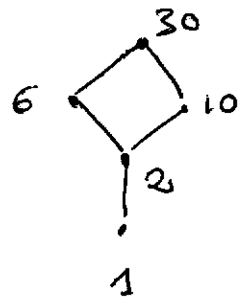
ESEMPI

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con relazione d'ordine la divisibilità.



non è un reticolo perché non c'è per esempio $4 \vee 6$

2. $A = \{1, 2, 6, 10, 30\}$ con relazione d'ordine la divisibilità



E' un reticolo e risulta

$6 \wedge 10 = 2 \qquad 6 \vee 10 = 30$

$30 \wedge 10 = 10 \qquad 30 \vee 10 = 30$ etc.

3. A insieme ~~...~~ qualsiasi, $(P(A), \subseteq)$ è un reticolo e risulta

$$X \vee Y = X \cup Y \quad \text{e} \quad X \wedge Y = X \cap Y$$

per ogni X, Y in $P(A)$

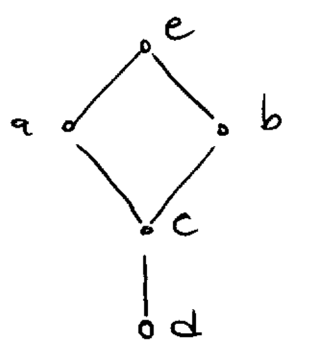
4. $(\mathbb{N}, |)$ è un insieme parzialmente ordinato che ha 1 come minimo e 0 come massimo (accettando la convenzione che $\forall n \in \mathbb{N},\ n | 0$). Inoltre $(\mathbb{N}, |)$ è un reticolo e risulta $\forall x, y \in \mathbb{N}$

$$x \wedge y = MCD(x, y) \qquad x \vee y = mcm(x, y).$$

<u>SOTTORETICOLI</u>

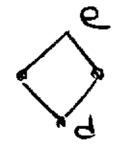
Sia $(L, \leq)$ un reticolo. Un sottoinsieme M di L è un sottoreticolo se $\forall x, y \in M$, $x \wedge y \in M$ e $x \vee y \in M$
(Attenzione: $x \wedge y$ e $x \vee y$ sono quelli di L)

ESEMPIO



L

$M_1 = \{a, b, e, d\}$ non è un sottoreticolo perché

$a \wedge b = c \notin M_1$ però $(M_1, \leq)$ è un reticolo () ma non sottoreticolo di L.

Invece $M_2 = \{a, b, e, c\}$ è un sottoreticolo di L.

RETICOLI DISTRIBUTIVI

Sia $(L, \leq)$ un reticolo. In generale non valgono le leggi distributive cioè in generale non è vero che

LD1) $\forall a, b, c \in L \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

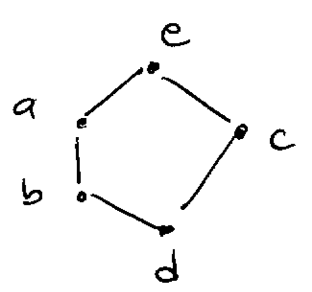
LD2) $\forall a, b, c \in L \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Fatto: Se in un reticolo $(L, \leq)$ vale (LD1) allora vale (LD2) e viceversa.

Def. Un reticolo $(L, \leq)$ si dice distributivo se valgono le leggi distributive.

ESEMPI

① N_5

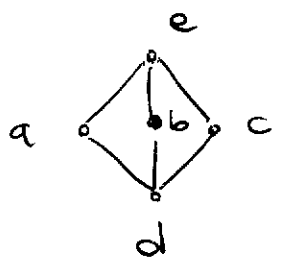


reticolo non distributivo perché

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge e = a$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee d = b$

② M_3



reticolo non distributivo poiché

$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

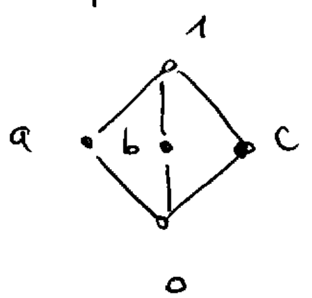
<u>Criterio</u>: un reticolo $(L, \leq)$ è distributivo se e solo se non ha M_3 o N_5 come sottoreticolo.

<u>RETICOLI COMPLEMENTATI</u>

Un reticolo si dice limitato se ammette massimo (1) e minimo (0).

Se $a \in L$ un elemento $b \in L$ si dice un complemento di a se $a \vee b = 1$ e $a \wedge b = 0$.

<u>Esempio</u>



allora $a \vee b = 1$ e $a \wedge b = 0$ con b è un complemento di a (e lo è anche c)

Dato $a \in L$ con L reticolo possono non esistere complementi di a in L o possono esisterne più di uno.

<u>Def.</u> Un reticolo si dice complementato se ogni suo elemento ammette complemento.

<u>Fatto</u> Sia $(L, \leq)$ un reticolo limitato e distributivo. Se $a \in L$ ammette complemento questo è unico.

GRAFI

A insieme, $P(A)$ insieme delle parti di A

$P_n(A) = \{ X \in P(A) \mid |X| = n \}$

$P_2(A) = \{ X \in P(A) \mid |X| = 2 \}$ insieme dei sottoinsiemi di A con 2 elementi

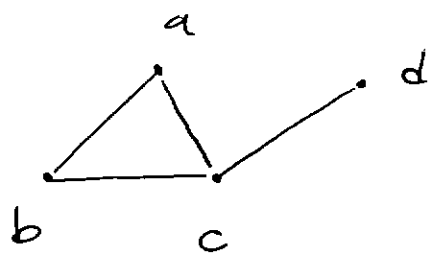
Def Un grafo (semplice) $G = (V, L)$ è una coppia di insiemi dove V è un insieme non vuoto e $L \subseteq P_2(V)$

Gli elementi di V si dicono vertici e quelli di L lati.

ESEMPIO

$V = \{a, b, c, d\}$ $L = \{ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\} \}$

$G = (V, L)$



Nota 1 nella definizione di grafo semplice non sono consentiti cappi