Primo Compitino di Elementi di Matematica (Matematica discreta)B

13 novembre 2009

COGNOME ____________________

NOME ____________________ MATRICOLA ____________________

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$$

definita da

$$f(n) = \sum_{r|n} r$$

(ovvero $f(n)$ è data dalla somma dei divisori positivi di n). Quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) la proposizione "$\forall p$, p primo $\in \mathbb{N}$, $(p+1) \in Im(f)$" è vera;
b) la proposizione "$\forall p$, p primo $\in \mathbb{N}$, $p \in Im(f)$" è vera;
c) la proposizione "$\exists p$, p primo $\in \mathbb{N}$, $p \notin Im(f)$" è falsa;
d) nessuna delle precedenti.

2. Data la funzione $f : A \to B$, f è suriettiva se:

a) $\forall\, y \in B, \forall\, x \in A : f(x) \neq y$;
b) $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A : f(x) = y$;
c) $\exists\, y \in B$: $\forall x \in A,\ f(x) = y$;
d) $\exists\, y \in B$: $\forall x \in A,\ f(x) \neq y$.

3. Siano A, B sottoinsiemi di un insieme $\mathbb{S}$ tali che almeno uno tra A e B sia non vuoto. Se la differenza simmetrica $A \Delta B = \emptyset$ (ricordiamo: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$), allora

a) $A = \emptyset$;
b) $B = \emptyset$
c) $A \neq B$.
d) nessuna delle precedenti.

4. La proposizione

$$(\neg p \vee q) \longleftrightarrow (p \to q)$$

è:
a) né una tautologia né una contraddizione
b) una contraddizione
c) una tautologia
d) logicamente equivalente a q.

5. Data la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, \text{ tali che } x^3 = y^3 + z^3,$$

quale delle seguenti ne è la negazione:
a) $\exists\, x \in \mathbb{Z}, : \forall\, y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^3 \neq y^3 + z^3$
b) $\exists\, x \in \mathbb{Z}, : \exists\, y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^3 \neq y^3 + z^3$
c) $\forall\, x \in \mathbb{Z}, : \exists\, y \in \mathbb{Z}, \forall\, z \in \mathbb{Z}, x^3 \neq y^3 + z^3$
d)$\exists\, x \in \mathbb{Z} : \forall\, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, x^3 \neq y^3 + z^3$

6. Siano $A = \mathbb{N}^*$ e $B = 5\mathbb{N}^* = \{5h | h \in \mathbb{N}^*\}$. Sia R la corrispondenza di A in B definita da

$$R = \{(a, b) \in A \times B \ \mid \ m.c.m.(a, b) = 5\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a) R è una funzione da A a B;
b) $|R| = 1$;
c) $|R| = 2$;
d) R è un insieme infinito.

7. Sia A un insieme non vuoto e si consideri la corrispondenza R di $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(A)$ definita da

$$R = \{((S, T), S \cup T) : \ (S, T) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?
a) esiste una sola coppia $(S, T) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tale che $((S, T), A) \in R$.
b) R è una funzione iniettiva;
c) R è una funzione suriettiva;
d) esistono almeno due coppie $(S, T) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tale che $((S, T), \emptyset) \in R$.

---

8. Si dia la definizione di corrispondenza tra due insiemi A e B e di funzione da A a B. Si dia un esempio di una corrispondenza tra A e B che non sia una funzione da A a B. Data una funzione $f : A \to B$, si dica cosa si intende per codominio di f e per insieme immagine (ovvero l'immagine di f).

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

9.

- Si enunci il principio di induzione (I forma)
- Sia $P(n)$ il predicato (o funzione proposizionale):

$$11^{2n} - 1 \quad \text{è divisibile per } 8$$

  Si dimostri, per induzione, che $\forall n \geq 1, P(n)$.