Recupero Secondo Compitino di Elementi di Matematica (Matematica discreta)

12 febbraio 2010

COGNOME ______________________________

NOME ______________________ MATRICOLA ______________________

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni e sia $g \circ f = \iota_A$, dove ι_A è la funzione identica dell'insieme A (cioè $\iota_A(a) = a$ per ogni $a \in A$). Allora
a) f è iniettiva;
b) g è iniettiva;
c) $g \circ f$ è suriettiva ma non iniettiva;
d) $g \circ f$ è iniettiva ma non suriettiva;

2. Sia p un numero primo dispari, l'equazione diofantea

$$ax + 2py = 7p$$

ha soluzioni

a) se e solo se a è pari;
b) se e solo se a è divisibile per p;
c) se e solo se a è un numero non divisibile né per p né per 2 ;
d) se e solo se a è dispari;

3. Siano a, b, c, s, t interi non nulli con

$$as + bt = c$$

Allora il $M.C.D.(a, b)$ è

a) c
b) un divisore di c;
c) divisibile per c;
d) nessuna delle precedenti.

4. Si consideri la congruenza modulo pq in $\mathbb{Z}$, con p e q numeri primi distinti dispari. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $px \equiv 1 \bmod pq$;
b) esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $qx \equiv 1 \bmod pq$;
c) $px \equiv 0 \bmod pq$ se e solo se $x \in [0]_{pq}$;
d) esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $2x \equiv 1 \bmod pq$

5. Fissato un intero positivo n, si consideri la congruenza modulo n su $\mathbb{Z}$ e siano $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$.. Dire che $a \equiv b \bmod n$ è equivalente a

a) $b = a + nk$ per $k \in \mathbb{Z}$;
b) $a - b$ divide n;
c) a e n divisi per b danno lo stesso resto;
d) $ab = nk$ per $k \in \mathbb{Z}$;

6. Indicato con $\mathbb{Z}_p$ l'insieme delle classi di resto modulo p, con p primo dispari, si ha:

a) $\mathbb{Z}_p = \{ [p^0]_p , [p^1]_p , [p^2]_p , \dots [p^{p-1}]_p ;$
b) $\mathbb{Z}_p = \{[0 \cdot p]_p , [1 \cdot p]_p , [2p]_p , \dots [(p-1)p]_p ;$
c) $\mathbb{Z}_p = \{[p]_p , [p+1]_p , [p+2]_p , \dots [p + (p-1)]_p ;$
d) $\mathbb{Z}_p = \{[1^p]_p , [2^p]_p , \dots [(p-1)^p]_p \}.$

7. Si consideri la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{Z}$ definita da

$$(a, b) \in \mathcal{R} \iff a = b \text{ oppure } a, b \in \mathbb{N}$$

L'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ è

a) $\{\mathbb{N}, \{x\} : x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$
b) $\{\mathbb{N}, \{x\} : x \in \mathbb{N}\}$
c) $\{\mathbb{Z}, \{x\} : x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$
d) $\{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$

---

8. Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme A. Definire classi di equivalenza e insieme quoziente. Dimostrare che, date due classi di equivalenza $[a]_\mathcal{R}$ e $[b]_\mathcal{R}$, se $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \neq \emptyset$, allora $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

9.

a) Si determini $M.C.D.(876, 672)$;
b) Si dica se l'equazione diofantea

$$876x + 672y = 36$$

ha soluzione e, in caso ne abbia, si determini una soluzione;

c) Si determinino tutte e sole le soluzioni dell'equazione diofantea

$$876x + 672y = 36$$

.