

Recupero primo Compitino di Elementi di Matematica (Matematica discreta)A

12 FEBBRAIO 2010

COGNOME _____

NOME _____ MATRICOLA _____

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Siano A, B sottoinsiemi di un insieme S e si ponga

$$\bar{A} = S \setminus A, \quad \bar{B} = S \setminus B.$$

Risulta vero:

- a) $S = A \cup \bar{B}$ se $A \subseteq B$;
- b) $S = A \cup \bar{B}$ se $B \subseteq A$
- c) $A \cap \bar{B} = \emptyset \quad \forall A, B \subseteq S$;
- d) $A \cap \bar{B} \neq \emptyset \quad \forall A, B \subseteq S$;

2. Data la funzione $f : A \rightarrow B$, negare che f sia suriettiva vuol dire:

- a) $\forall y \in B \exists x \in A; f(x) = y$
- b) $\forall y \in B \exists x \in A; f(x) \neq y$
- c) $\exists y \in B : \forall x \in A, f(x) \neq y$;
- d) $\exists y \in B : \forall x \in A, f(x) = y$.

3. Si consideri la funzione proposizionale (o predicato):

$$y^x \in \mathbb{Z}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) La proposizione " $\forall y \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : y^x \in \mathbb{Z}$ " ha valore di verità falso
- b) La proposizione " $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} y^x \in \mathbb{Z}$ " ha valore di verità vero
- c) La proposizione " $\forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} y^x \in \mathbb{Z}$ " ha valore di verità vero
- d) nessuna delle precedenti.

4. Data la proposizione

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

dire se:

- a) è una tautologia
- b) è una contraddizione
- c) è logicamente equivalente a $p \rightarrow q$
- d) nessuna delle precedenti.

5. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da:

$$f(a) = b \iff b = a^2 + 3.$$

quale delle seguenti è vera (si ricorda che $f^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = b\}$):

- $Im(f) = \mathbb{Z}$
- $Im(f) = \mathbb{N}$
- $|f^{-1}(b)| = 2 \forall b \in \mathbb{N}^*$
- $|f^{-1}(b)| \leq 2 \forall b \in \mathbb{N}^*$.

6. Siano $A = \mathbb{N}^* = B = \mathbb{N}^*$ e sia R la corrispondenza di A in B definita da

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \text{ divide } b\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- R è una funzione da A a B ;
- se $(a, b) \in R$ allora per ogni divisore d di a risulta $(d, b) \in R$;
- $\forall b \in \mathbb{N}^* \exists a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*, a_1 \neq a_2 : (a_1, b), (a_2, b) \in R$;
- $\exists a \in \mathbb{N}^* : (1, a) \notin R$.

7. Dati r numeri primi distinti p_1, p_2, \dots, p_r , sia $A_{p_i}, r > 1$, l'insieme:

$$A_{p_i} = \{p_i^n, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Allora

- $\bigcap_{i=1, \dots, r} A_{p_i} = \emptyset$;
- $|\bigcap_{i=1, \dots, r} A_{p_i}| = 1$;
- $\bigcap_{i=1, \dots, r} A_{p_i}$ è un insieme infinito;
- $\bigcup_{i=1, \dots, r} A_{p_i} \supseteq \mathbb{Z}$;

8. Dato un insieme X siano A, B due suoi sottoinsiemi.

- si dia la definizione di $A \cap B$ e di $A \cup B$ e si dimostri che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- si dia la definizione di differenza tra A e B ;
- si dica, motivando la risposta, se è vero che comunque si scelga $A \subseteq X$ esiste un solo B tale che $A \cup B = X$.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

9.

- Si enunci il principio di induzione in I forma;
- Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ il numero $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ è divisibile per 9