

# Prima Esercitazione di Elementi di Matematica (Matematica discreta)

4 NOVEMBRE 2009

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_ MATRICOLA \_\_\_\_\_

*Indicare la risposta corretta con una crocetta*

1. Siano  $A, B$  sottoinsiemi non vuoti di un insieme  $S$ . Si indichi con  $B^c$  l'insieme complementare di  $B$ . Se  $A \subseteq B$ , allora

- a)  $B \cup A^c = S$
- b)  $A^c \subseteq B^c$
- c)  $(B \setminus A) \cap A^c = A^c$
- d)  $B^c \cup A = S$ .

2. Siano date le funzioni  $f : \mathbb{Z} \rightarrow (1024)\mathbb{Z}$ ,  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definite da

$$f(x) = 1024x, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è un intero pari} \\ -1, & \text{se } x \text{ è un intero dispari} \end{cases}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a)  $f$  è iniettiva e  $\{x \in \mathbb{Z} : g(x) = -1\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$  ;
- b)  $g$  è iniettiva;
- c)  $f$  è iniettiva e  $\{x \in \mathbb{Z} : g(x) = 5\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$  ;
- d)  $f$  è iniettiva e  $g$  è suriettiva.

3. Si consideri la funzione proposizionale (o predicato):

$$x^y \in \mathbb{Z}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) La proposizione " $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x^y \in \mathbb{R}$ " ha valore di verità falso
- b) La proposizione " $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} x^y \in \mathbb{Z}$ " ha valore di verità vero
- c) La proposizione " $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} x^y \in \mathbb{Z}$ " ha valore di verità vero
- d) nessuna delle precedenti.

4. La proposizione

$$\neg(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

è:

- a) una tautologia
- b) una contraddizione
- c) né una tautologia né una contraddizione
- d) logicamente equivalente a  $q$ .

5. Data la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, \text{ tali che } x^2 \neq y^2 + z^2,$$

quale delle seguenti ne è la negazione:

- a)  $\exists x \in \mathbb{Z}, : \forall y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^2 = y^2 + z^2$
- b)  $\exists x \in \mathbb{Z}, : \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^2 = y^2 + z^2$
- c)  $\forall x \in \mathbb{Z}, : \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^2 = y^2 + z^2$
- d)  $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, x^2 = y^2 + z^2$

6. Siano  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $B = 3\mathbb{N}^* = \{3h | h \in \mathbb{N}^*\}$ . Sia  $R$  la corrispondenza di  $A$  in  $B$  definita da

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid M.C.D.(a, b) = 3\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $(3, b) \notin R \forall b \in B$ .
- b)  $(6, b) \in R, \forall b \in B$ .
- c)  $(6, 3^n) \in R, \forall n \geq 0$ .
- d)  $(6, 3^n) \in R, \forall n \geq 5$ .

7. Si consideri la corrispondenza  $R$  di  $\mathbb{N}$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  definita da

$$R = \{(n, A) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : ||A|| \leq n\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $(n, \emptyset) \notin R$ .
- b) è una funzione di  $\mathbb{N}$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ;
- c) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n, \{n\}) \in R$ ;
- d) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n, \emptyset) \in R$ .

8. Si dia la definizione di funzione dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$ .

Si dia la definizione di funzione suriettiva dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$ .

Si dia un esempio di una funzione iniettiva tra  $A$  e  $B$  che non sia una funzione suriettiva.

*Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione*

9.

- Si enunci il principio di induzione (I forma)
- Sia  $P(n)$  il predicato (o funzione proposizionale):

$$2^{5n} - 1 \text{ è divisibile per } 31$$

Si dimostri, per induzione, che  $\forall n \geq 1, P(n)$ .