

Esercitazione di Matematica Discreta

4 NOVEMBRE 2008

COGNOME _____

NOME _____ MATRICOLA _____

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Siano dati gli insiemi $A = 3\mathbb{N}$ (cioè $A = \{3h, h \in \mathbb{N}\}$), $B = 6\mathbb{Z}$ (cioè B è l'insieme formato da tutti i numeri interi che sono multipli di 6) e $C = 4\mathbb{Z}$ (cioè C è l'insieme formato da tutti i numeri interi che sono multipli di 4). Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) $B \subseteq A$
- b) $(B \setminus A) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$
- c) $B \cap C = 24\mathbb{Z}$
- d) $((B \cap C) \setminus A) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

2. Siano dati gli insiemi $A_k = \{-k, -(k-1), \dots, k-1, k\}$ per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
Siano

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad Y = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Risulta:

- a) $X = \mathbb{N}$ e $Y = A_0$
- b) $X = \mathbb{Z}$ e $Y = \emptyset$
- c) $X = \mathbb{N}$ e $Y = \emptyset$
- d) $X = \mathbb{Z}$ e $Y = A_0$

3. Dire quale delle seguenti affermazioni è **falsa** dove l'insieme universo per ciascuna variabile è l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi:

- a) $\forall x, \exists y (y - x^2 < 1000)$
- b) $\exists x : \forall y ((x^2 > y) \wedge (x < y))$
- c) $\exists x, \exists y (x = \frac{1}{y})$
- d) $\exists x, \forall y (x + y = y)$

4. Per quali valori di verità delle proposizioni p e q la proposizione composta

$$(q \rightarrow (p \vee \neg(p \rightarrow q)))$$

risulta essere **falsa**?

- a) p vera e q falsa
- b) p falsa e q vera
- c) p vera e q vera
- d) p falsa e q falsa

5. Data la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ dispari}, \exists p, q \in \mathbb{N}, p \text{ e } q \text{ primi tali che } x = p + q,$$

quale delle seguenti ne è la negazione:

- a) $\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ dispari}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \text{ e } q \text{ primi } x = p + q$
- b) $\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ pari}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \text{ e } q \text{ non primi } x = p + q$
- c) $\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ pari}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \text{ e } q \text{ primi } x \neq p + q$
- d) $\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ dispari}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \text{ e } q \text{ primi } x \neq p + q$.

6. Siano $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Sia R la corrispondenza di A in B definita da

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a - 2b = 0\}$$

Quanti elementi ha R ?

- a) 3
- b) 56
- c) 5
- d) $(1, 2) \in R$

7. Sia R la corrispondenza di \mathbb{N} in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definita da

$$R = \{(n, X) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ è l'insieme dei divisori di } n\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) R è una funzione di \mathbb{N} in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- b) R è una corrispondenza di \mathbb{N} in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma non una applicazione.
- c) $(15, 4) \in R$.
- d) $(15, \{3, 5\}) \in R$.

8. Si dia la definizione di prodotto cartesiano tra due insiemi A e B ; Si dia la definizione di corrispondenza tra due insiemi A e B . Si dia un esempio di una corrispondenza tra A e B che non sia una funzione.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

9. Sia $P(n)$ il predicato (o funzione proposizionale):

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

Si dimostri, per induzione, che $\forall n \geq 1, P(n)$. *Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione*

10. Dimostrare per induzione su n che $3^{4n} - 1$ è divisibile per 5 per ogni $n \geq 0$