

Note di Matematica Discreta

GRAFI

Lemma 1. *Sia $G = (V, L)$ un grafo con un numero finito di vertici. Allora*

$$|L| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$$

dove $d(v)$ è il grado del vertice v .

Dimostrazione

Indichiamo con v_1, v_2, \dots, v_m i vertici del grafo e con l_1, l_2, \dots, l_r i lati del grafo. Poi costruiamo una griglia in questo modo. Mettiamo in orizzontale i vertici del grafo e in verticale i lati del grafo. Segnamo una crocetta all'incrocio tra la riga del lato l_i e la colonna del vertice v_j se il vertice v_j è estremo del lato l_i . Vogliamo contare il numero totale di crocette segnata sulla griglia. Contiamole per colonne. Fissato un vertice v , sulla colonna di v abbiamo tante crocette quanti sono i lati di cui v è estremo, cioè sulla colonna di v abbiamo $d(v)$ crocette. Sommando sulle colonne abbiamo che il numero di crocette è $\sum_{v \in V} d(v)$.

Contiamo adesso le crocette per righe. Fissato il lato l sulla riga di l abbiamo esattamente due crocette, una per ciascun estremo di l . Sommando sulle righe abbiamo allora che il numero di crocette è

$$\sum_{l \in L} 2 = 2|L|$$

In tutto

$$|L| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v).$$