

Compito di Matematica Discreta

20 MARZO 2008

COGNOME _____

NOME _____ MATRICOLA _____

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Siano $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ e b un numero naturale. L'equazione diofantea

$$ax + a^b y = b$$

ha soluzioni

- a) sempre;
- b) se e solo se a divide b ;
- c) solo per b positivo;
- d) nessuna delle precedenti.

2. Si consideri $[110]_{21}^{2402}$ in \mathbb{Z}_{21} . Risulta uguale a

- a) $[4]_{21}$;
- b) $[5]_{21}$;
- c) $[0]_{21}$;
- d) $[2]_{21}$.

3. Sia A un insieme con 6 elementi. Quanti sono i sottinsiemi di A con un numero dispari di elementi? Allora

- a) 2^6 ;
- b) 2^5 ;
- c) $5!$;
- d) $6!$.

4. Sia dato l'insieme $A = \{2, 5, 4, 10, 12, 20, 25\}$ con l'ordinamento dato dalla divisibilità (cioè $a \leq b$ se e solo se $a|b$, per a, b elementi di A). Allora:

- a) $(A, |)$ è un reticolo;
- b) $(A, |)$ ha tre elementi massimali;
- c) $(A, |)$ ha due elementi massimali;
- d) $(A, |)$ ha tre elementi minimali.

5. Sia $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 50\}$ l'insieme degli interi compresi tra 0 e 50 e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A . Si consideri la corrispondenza di $\mathcal{P}(A)$ in \mathbb{N} definita da

$$\rho = \{(X, n) : X \in \mathcal{P}(A), |X| = n\}$$

dove $|X|$ è la cardinalità di X .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) ρ è una applicazione di $\mathcal{P}(A)$ in \mathbb{N} ;
- b) ρ è una corrispondenza di $\mathcal{P}(A)$ in \mathbb{N} ma non è una applicazione;
- c) ρ è una applicazione iniettiva di $\mathcal{P}(A)$ in \mathbb{N} ;
- d) ρ è una applicazione invertibile di $\mathcal{P}(A)$ in \mathbb{N} ;

6. Quale dei seguenti insiemi è un gruppo (rispetto all'operazione indicata):

- a) l'insieme \mathbb{N} con l'operazione di addizione tra numeri naturali;
- b) l'insieme \mathbb{Z}^* con l'operazione di prodotto tra numeri interi;
- c) l'insieme \mathbb{Q}^* con l'operazione di prodotto tra numeri razionali;
- d) l'insieme delle funzioni da un insieme con n elementi in sé (n naturale positivo) con operazione la composizione di funzioni.

7. Data la proposizione

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 : \forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \quad nm = m$$

dire quale delle seguenti proposizioni ne è la negazione :

- a) $\exists n \in \mathbb{Z}, n < 0 : \forall m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad nm = m$;
- b) $\forall n \in \mathbb{Z}, n < 0 : \exists m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad nm \neq m$;
- c) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 : \exists m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \quad nm \neq m$;
- d) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 : \exists m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \quad nm = m$;

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

8. Mostrare, per induzione su n , che

$$\forall n \geq 1 \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$