

Compitino di Matematica Discreta B

9 NOVEMBRE 2007

COGNOME _____

NOME _____ MATRICOLA _____

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Siano dati gli insiemi $A = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120\}$, $B = 10\mathbb{Z}$ (cioè B è l'insieme formato da tutti i numeri interi che sono multipli di 10) e $C = 6\mathbb{Z}$ (cioè C è l'insieme formato da tutti i numeri interi che sono multipli di 6). Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme $A \setminus (B \cap C)$?

- a) 2^{13}
- b) 2^8
- c) 2^5
- d) infiniti.

2. Siano dati gli insiemi $A_k = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 3k\} = \{0, 1, \dots, 3k\}$ per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, siano

$$X = \bigcup_{k=0}^n A_k \quad Y = \bigcap_{k=0}^n A_k$$

Risulta:

- a) $X = A_n$ e $Y = A_0$
- b) $X = A_n$ e $Y = \emptyset$
- c) $X = \mathbb{N}$ e $Y = \emptyset$
- d) $X = \mathbb{Z}$ e $Y = A_0$

3. Dire quale delle seguenti affermazioni è **vera** dove l'insieme universo per ciascuna variabile è l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi:

- a) $\forall x, \exists y (x = \frac{1}{y})$
- b) $\forall x, \exists y (x = y^2)$
- c) $\forall x, \forall y (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
- d) $\forall x, \exists y (x + y = -3)$

4. Per quali valori di verità delle proposizioni p e q la proposizione composta

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$$

risulta essere **falsa**?

- a) p vera e q falsa
- b) p vera e q vera

- c) p falsa e q falsa
- d) p falsa e q vera

5. Data la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0, \exists y \in \mathbb{Z}, ((y^2 \leq x) \wedge (x < (y + 1)^2)),$$

quale delle seguenti ne è la negazione:

- a) $\exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 0, \forall y \in \mathbb{Z}, ((x < y^2) \vee (x \geq (y + 1)^2)),$
- b) $\forall x \in \mathbb{Z}, x < 0, \exists y \in \mathbb{Z}, ((y^2 \leq x) \vee (x < (y + 1)^2)),$
- c) $\exists x \in \mathbb{Z}, x < 0, \forall y \in \mathbb{Z}, ((y^2 \leq x) \vee (x < (y + 1)^2)),$
- d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 0, \forall y \in \mathbb{Z}, ((x \leq y^2) \vee (x \geq (y + 1)^2)),$

6. Siano $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Sia R la corrispondenza di A in B definita da

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid b = \frac{1-a}{2}\}$$

Quanti elementi ha R ?

- a) 8
- b) 4
- c) 7
- d) 5

7. Sia R la corrispondenza di \mathbb{N}^* in \mathbb{N} definita da

$$R = \{(n, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \mid d \text{ è il numero dei divisori positivi, distinti di } n\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) R è una funzione di \mathbb{N}^* in \mathbb{N} .
- b) R è una corrispondenza di \mathbb{N}^* in \mathbb{N} ma non una applicazione.
- c) $(4, 1) \in R$.
- d) $(4, \{1, 2, 4\}) \in R$.

8. Si dia la definizione di funzione tra un insieme A e un insieme B . Si specifichi cosa si intende per dominio e cosa per codominio.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

9. Sia $P(n)$ il predicato (o funzione proposizionale):

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Si dimostri, per induzione, che $\forall n \geq 1, P(n)$.