

Esercitazione di Matematica Discreta

6 FEBBRAIO 2007

COGNOME _____

NOME _____ MATRICOLA _____

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Si consideri l'equazione nell'incognita $[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$

$$[x]_{12}^5 = [7]_{12}.$$

Allora

- a) l'equazione non ha soluzioni in \mathbb{Z}_{12} ;
- b) l'equazione ha infinite soluzioni in \mathbb{Z}_{12} ;
- c) l'equazione ha almeno una soluzione in \mathbb{Z}_{12} .

2. Siano A e B due insiemi di cardinalità n e m rispettivamente. Sia r il numero delle applicazioni iniettive tra A e B . Allora:

- a) $r > 0$ se $n > m$;
- b) $r = 0$ se $n < m$;
- c) $r = n!$ se $n = m$ ma non sono tutte biiettive.
- d) $r = n!$ se $n = m$ e coincidono con le biiezioni.

3. Sia (L, \leq) un reticolo. Si dice che (L, \leq) è distributivo se e solo se:

- a) esistono x, y, z in L si ha $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- b) per ogni x, y, z in L si ha $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- c) per ogni x, y, z in L si ha $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ma $x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

4. Sia $G = (V, L)$ il grafo dove $V = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq 1543\}$ e, per a, b in V , si ha $\{a, b\} \in L$ se e solo se 2 divide $M.C.D.(a, b)$. Risulta

- a) $|L| = \binom{772}{2}$;
- b) $|L| = \binom{1544}{2}$;
- c) $|L| = \binom{771}{2}$.
- d) $|L| = \binom{1543}{2}$.

5. Si consideri l'equazione nell'incognita $x \in \mathbb{N}$

$$[3]_{5n}^x = [1]$$

L'equazione ha soluzioni

- a) se e solo se $MCD(5, n) = 1$;
- b)** se e solo se $MCD(3, n) = 1$;
- c) se e solo se 3 divide n ;
- d) sempre.

6. Sia un insieme X finito di cardinalità $n > 1$. Sia L il reticolo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Allora:

- a) L non è distributivo;
- b) L non è limitato;
- c) L è complementato;
- d) per ogni $0 \leq m \leq n$ esiste un solo sottoreticolo con cardinalità 2^m .

7. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e si consideri l'insieme $A = \mathcal{P}(X)$ con l'ordinamento dato dall'inclusione, Sia poi B il sottoinsieme $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Allora:

- a) l'insieme B ammette minimo;
- b) l'insieme B ammette massimo;
- c)** l'elemento $\{1, 2\}$ è un elemento minimale di B ;
- d) l'elemento $\{1, 2\}$ non è elemento massimale di B .

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

8.

(a) Provare che il sottoinsieme H di \mathbb{Z}_{12} definito da:

$$H = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$$

è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

b) Posto

$$H + [2] = \{[2]_{12}, [5]_{12}, [8]_{12}, [11]_{12}\}$$

mostrare che l'applicazione $\varphi : H \rightarrow H + [2]$ definita da

$$\varphi([h]) = [h] + [2]$$

è una biiezione.