Compitino di Matematica Discreta B

12 febbraio 2007

COGNOME ____

NOME ____________________ MATRICOLA ____________________

Indicare la risposta corretta con una crocetta

1. Si consideri l'equazione nell'incognita $[x]_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$

$$[x]_{10}^5 = [7]_{10}.$$

Allora

a) l'equazione non ha soluzioni in $\mathbb{Z}_{10}$;
b) l'equazione ha infinite soluzioni in $\mathbb{Z}_{10}$;
c) l'equazione ha almeno una soluzione in $\mathbb{Z}_{10}$;
d) nessuna delle precedenti.

2. Siano A e B due insiemi di cardinalità m e n rispettivamente. Sia r il numero delle applicazioni da A in B. Allora:

a) $r = n^m$;
b) $r = m^n$;
c) $r = n!$;
d) $r = m!$.

3. Sia $(L, \leq)$ un reticolo limitato. Indichiamo con 1 il massimo di L e con 0 il minimo di L. Si dice che $(L, \leq)$ è complementato se e solo se:

a) $\exists\, a, b \in L \; : \; a \wedge b = 0 \quad \text{e} \quad a \vee b = 1$;
b) $\forall a \in L \;\; \exists\, b \in L \; : \; a \wedge b = 1 \quad \text{e} \quad a \vee b = 0$
c) $\forall a, b, c \in L \; : \; a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
d) $\forall a \in L \;\; \exists\, b \in L \; : \; a \wedge b = 0 \quad \text{e} \quad a \vee b = 1$;

4. Dato un grafo con 5 vertici, $v_1, \dots v_5$, dire quale delle seguenti possibilità per i gradi dei vertici $(d(v_1), \dots d(v_5))$ può verificarsi.

a) $(3, 1, 2, 2, 3)$;
b) $(1, 2, 3, 4, 5)$;
c) $(3, 3, 2, 2, 2)$;
d) $(1, 1, 1, 1, 1)$.

5. Si consideri l'equazione nell'incognita $x \in \mathbb{N}$

$$[7]_{13n}^x = [1]$$

L'equazione ha soluzioni

a) se e solo se $MCD(7, n) = 1$;
b) se e solo se $MCD(13, n) = 1$;
c) se e solo se 7 divide n;
d) mai.

6. Sia q un numero primo e $D(2q) = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ divide } 2q\}$ l'insieme dei divisori interi positivi di $2q$ ordinato rispetto alla divisibilità. Sia L il reticolo $(D(2q), |)$ (cioè a e b sono in relazione se e solo se a divide b). Allora:

a) L non è distributivo;
b) L non è limitato;
c) L non è complementato;
d) l'elemento q ha come complemento 2.

7. Sia $A = \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{3\}\}$ con l'ordinamento dato dall'inclusione insiemistica. Sia poi B il sottoinsieme $B = \{\{2\}, \{3\}\}$. Allora:

a) l'insieme B ammette minimo;
b) l'insieme B ammette massimo;
c) l'estremo inferiore di B è $\{2, 3\}$;
d) l'estremo superiore di B è $\{2, 3\}$.

Si svolga il seguente esercizio, dando una piena giustificazione

8.

(a) Provare che il sottoinsieme H di $\mathbb{Z}_8$ definito da:

$$H = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$$

è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_8, +)$.

b) Posto

$$[1] + H = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$$

mostrare che l'applicazione $\varphi : H \to [1] + H$ definita da

$$\varphi([h]) = [1] + [h]$$

è una biiezione.