

## Esercizi di Istituzioni

**Esercizio 1.** Siano  $K, H$  sottogruppi di un gruppo  $G$  con  $K \subseteq H$  e si supponga che gli indici  $|G : H|$  e  $|H : K|$  sono finiti. Mostrare che allora anche l'indice  $|G : K|$  è finito e risulta

$$|G : K| = |G : H||H : K|$$

**Esercizio 2.** Mostrare che l'intersezione di due sottogruppi di indice finito in un gruppo ha indice finito. Più in generale mostrare che l'intersezione di un numero finito di sottogruppi di indice finito ha indice finito.

**Esercizio 3.** Sia  $\emptyset \neq H \subseteq G$  con  $G$  gruppo e  $H$  finito. Mostrare che  $H$  è un sottogruppo se e solo se  $H$  è chiuso rispetto al prodotto in  $G$ .

**Esercizio 4.** ESEMPIO DI GRUPPO

Il gruppo  $Q$  dei quaternioni di ordine 8.

**Esercizio 5.** Siano  $M$  ed  $N$  sottogruppi normali di un gruppo  $G$  con  $M \cap N = 1$ . Mostrare che  $M$  ed  $N$  commutano elemento per elemento.

**Esercizio 6.** Siano  $H$  e  $K$  sottogruppi di un gruppo  $G$  allora

$$|G : H \cap K| \leq |\langle H \cup K \rangle : K|.$$

Se  $(|\langle H \cup K \rangle : H|, |\langle H \cup K \rangle : K|) = 1$  allora vale il segno di uguaglianza.

**Esercizio 7.** Sia  $p$  un primo dispari. Mostrare che, a meno di isomorfismi, esistono al più due gruppi di ordine  $2p$ :  $C_{2p}$  e  $D_p$ .

**Esercizio 8.** Descrivere  $\text{Aut}(C_n)$  il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico di ordine  $n$ . Descrivere il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico infinito.

**Esercizio 9.** TEOREMA DI POINCARÈ

Sia  $H \leq G$  con  $|G : H|$  finito. Mostrare che allora è finito anche

$$|G : \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}|$$

dunque se un gruppo ha un sottogruppo di indice finito allora ha anche un sottogruppo normale di indice finito.

**Esercizio 10.** FORMULA DI BURNSIDE (LEMMA DI CAUCHY-SCHWARTZ)

Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $\Omega$  con  $G$  e  $\Omega$  entrambi finiti. Allora il numero  $N$  delle orbite nell'azione di  $G$  su  $\Omega$  è dato da

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

dove  $\chi(g)$  è il numero di elementi di  $\Omega$  fissati dall'elemento  $g \in G$ .

**Esercizio 11.** Sia  $D_n = \{1, a, \dots, a^{n-1}, b, ba, \dots, ba^{n-1}\}$  il gruppo diedrale di ordine  $2n$ , dove  $o(a) = n$ ,  $o(b) = 2$ ,  $bab = a^{-1}$ . Verificare che le classi di coniugio in  $D_n$  sono come segue:

$$*n = 2k + 1$$

$$cl(a^j) = \{a^j, a^{-j}\} \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$cl(b) = \{b, ba, \dots, ba^{n-1}\}$$

$$*n = 2k$$

$$cl(a^j) = \{a^j, a^{-j}\} \quad j \neq k$$

$$cl(a^k) = \{a^k\}$$

$$cl(b) = \{b, ba^2, \dots, ba^{n-2}\}$$

$$cl(ba) = \{ba, ba^3, \dots, ba^{n-1}\}$$

**Esercizio 12.** Quante collane di perline essenzialmente diverse si possono costruire usando sei perline di due colori diversi? (Si assume che una collana abbia la forma di un esagono regolare con una perlina in ciascun vertice.)

**Esercizio 13.** Sia  $G = \langle g \rangle$  ciclico di ordine  $n$ . Verificare che la formula di Burnside diventa

$$N = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \chi(g^d) \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

dove  $\varphi$  è la funzione di Eulero.

**Esercizio 14.** Sia  $G$  un gruppo finito. Mostrare che la probabilità che due elementi presi a caso commutino è

$$\frac{|G|}{k}$$

dove  $k$  è il numero di classi di coniugio di  $G$ .

Nota : i due elementi possono essere uguali.

**Esercizio 15.** Siano  $G$  un gruppo finito e  $P \in \text{Syl}_p(G)$  un  $p$ -Sylow di  $G$ . Mostrare che se

$$N_G(P) \leq S \leq G$$

allora  $N_G(S) = S$ .

**Esercizio 16.** Mostrare che il gruppo diedrale  $D_n$  è risolubile, per ogni  $n \geq 2$ .

**Esercizio 17.** Sia  $G$  un gruppo di ordine  $pq$  con  $p$  e  $q$  numeri primi. Allora:

- (1) se  $p = q$  allora  $o G \cong C_{p^2}$  oppure  $G \cong C_p \times C_p$ ;
- (2) se  $p < q$  allora  $G$  contiene un unico sottogruppo di ordine  $q$ . Se poi  $p$  non divide  $q - 1$  allora  $G \cong C_p \times C_q$ .

**Esercizio 18.** *Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti per un gruppo finito:*

- (1) *ogni gruppo di ordine dispari è risolubile (TEOREMA DI FEIT-THOMPSON);*
- (2) *un gruppo semplice non abeliano ha ordine pari.*

**Esercizio 19.** ESEMPIO DI GRUPPO

*Il gruppo reale affine.*

**Esercizio 20.** ESEMPIO

*Sia  $A$  un anello unitario e  $J$  un ideale nilpotente. Allora  $G = 1 + J = \{1 + x : x \in J\}$  è un gruppo nilpotente.*

**Esercizio 21.** *Siano  $x, y, z \in G$ , posto  $[x, y, z] = [x, [y, z]]$ , verificare che*

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$$

*dove  $a^b = bab^{-1}$  per  $a, b \in G$ .*

**Esercizio 22.** (LEMMA DEI TRE SOTTOGRUPPI)

*Siano  $H, K$  e  $L$  tre sottogruppi di  $G$ . Provare che se  $[H, K, L] = 1 = [K, L, H]$  allora anche  $[L, H, K] = 1$ . In particolare se  $N \triangleleft G$  e  $K, L, H$  sono sottogruppi di  $G$  con  $[H, K, L], [K, L, H] \leq N$  allora anche  $[L, H, K] \leq N$ .*

**Esercizio 23.** *Siano  $G$  un gruppo e  $\{\Gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$  la sua serie centrale discendente. Provare che per ogni  $i$  e  $j$  risulta*

$$[\Gamma_i(G), \Gamma_j(G)] \leq \Gamma_{i+j}(G)$$

**Esercizio 24.** *Siano  $M$  ed  $N$  sono sottogruppi normali nilpotenti di un gruppo  $G$ , di classe di nilpotenza rispettivamente  $c$  e  $d$ . Allora  $MN$  è un sottogruppo normale nilpotente di  $G$  di classe al più  $c + d$ .*

*(In particolare se  $G$  è finito, il prodotto dei suoi sottogruppi normali nilpotenti si dice sottogruppo di Fitting di  $G$ , ed è il massimo sottogruppo normale nilpotente di  $G$ )*

**Esercizio 25.** ESEMPIO DI GRUPPO LIBERO 1

*Siano  $\alpha$  e  $\beta$  gli elementi del gruppo simmetrico sull'insieme  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  definiti da  $\alpha(x) = x + 2$  e  $\beta(x) = \frac{x}{2x+1}$  (dove  $\alpha(\infty) = \infty$  e  $\beta(\infty) = \frac{1}{2}$ ). Sia poi  $F$  il sottogruppo del gruppo simmetrico su  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  generato da  $\alpha$  e  $\beta$ . Allora  $F$  è libero su  $\{\alpha, \beta\}$ .*

**Esercizio 26.** ESEMPIO DI GRUPPO LIBERO 2

*Sia  $F_1$  il sottogruppo di  $GL(2, \mathbb{Z})$  generato dalle matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Allora  $F_1$  è libero su  $\{A, B\}$ .*

**Esercizio 27.** Se  $H$  e  $K$  sono sottogruppi di un gruppo  $G$  allora  $H \cup K$  (unione insiemistica) è un sottogruppo se e solo se  $H \subseteq K$  oppure  $K \subseteq H$ .

**Esercizio 28.** Sia  $G$  un gruppo finito che ha esattamente un sottogruppo massimale. Provare che  $G$  ha ordine una potenza di un primo.

**Esercizio 29.** Sia  $G$  un gruppo qualsiasi. Provare che  $\text{Inn}(G)$  (gruppo degli automorfismi interni di  $G$ ) non può essere ciclico non banale.

**Esercizio 30.** Sia  $G$  un gruppo.

- (1) Sia  $G''$  ciclico. Mostrare che  $G'' \subseteq Z(G')$ .
- (2) Se, inoltre,  $G'/G''$  è ciclico mostrare che  $G'' = 1$ .

**Esercizio 31.** Sia  $G$  un gruppo finito che agisce transitivamente su un insieme finito  $\Omega$  con  $|\Omega| > 1$ . Provare che esiste un elemento  $g \in G$  con  $\chi(g) = 0$ .

**Esercizio 32.** Un gruppo finito  $G \neq 1$  non può essere unione insiemistica di coniugati di un suo sottogruppo proprio.

**Esercizio 33.** Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $\Omega$  con  $G$  e  $\Omega$  finiti. Diciamo che  $G$  è 2-transitivo se è transitivo sulle coppie ordinate  $(\alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta \in \Omega$  e  $\alpha \neq \beta$  (L'azione è definita da  $g.(\alpha, \beta) = (g.\alpha, g.\beta)$  per  $g \in G$ ). Mostrare che  $G$  è 2-transitivo se

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^2 = 2.$$

**Esercizio 34.** Se  $G$  è un gruppo semplice di ordine 60 mostrare che  $G \cong A_5$ .

**Esercizio 35.** Un gruppo è perfetto se è uguale al suo derivato (in particolare ogni gruppo semplice finito è perfetto). Sia  $N \triangleleft G$  con  $G/N$  perfetto. Se  $\varphi : G \rightarrow S$  è un omomorfismo con  $S$  risolubile, mostrare che  $\varphi(N) = \varphi(G)$ .

**Esercizio 36.** Sia  $G$  un gruppo finito, risolubile, non abeliano. Provare che  $Z(G) < F(G)$  dove  $F(G)$  è il sottogruppo di Fitting di  $G$ .

**Esercizio 37.** Sia  $G$  gruppo finito. Scriviamo  $f_n(G) = |\{x \in G : x^n = 1\}|$  per  $n \geq 1$  naturale. Un teorema di Frobenius afferma che se  $n$  divide l'ordine di  $G$  allora  $n$  divide  $f_n(G)$ . Dimostrare il teorema per  $n = p$  numero primo.

**Esercizio 38.** Supponiamo che ogni sottogruppo massimale di un gruppo finito  $G$  abbia indice primo e sia  $p$  il più grande primo che divide l'ordine di  $G$ . Provare che  $G$  ha un  $p$ -Sylow normale e che  $G$  è risolubile.

**Esercizio 39.** Un gruppo  $G$  si dice supersolubile se esiste una serie

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_m \triangleright G_{m+1} = 1$$

con  $G_i \triangleleft G$  e  $G_i/G_{i+1}$  ciclico. Mostrare che se  $G$  è supersolubile e finito allora un sottogruppo massimale ha indice primo.