

Compito di Istituzioni di Algebra

25 novembre 2010

Esercizio 1. . Sia $V = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle$ uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo \mathbb{F} . Sia poi M il gruppo degli endomorfismi di V che permutano i sottospazi 1-dimensionali $\langle e_i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$). Si provi che M è il prodotto semidiretto di un sottogruppo isomorfo al gruppo delle matrici diagonali $n \times n$ su \mathbb{F} e di un sottogruppo S isomorfo al gruppo simmetrico S_n su n oggetti.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine p^2 . Mostrare che G ha al più $p + 3$ sottogruppi.

Esercizio 3. Contare il numero di collane distinte che si possono fare con otto perline di due colori diversi.

Sugg.: si suppone che una collana abbia la forma di un ottagono regolare

Esercizio 4. Sia G un gruppo di ordine 255. Mostrare che G è ciclico.

Sugg.: siano P il 17-Sylow, Q un 3-Sylow e R un 5-Sylow di G . Provare che $PQ \subseteq N_G(Q)$ e $PR \subseteq N_G(R)$