Esercizi di Istituzioni di Algebra

Assumiamo, nel seguito, che per algebra di Lie si intenda algebra di Lie di dimensione finita.

Esercitazione 1 del 13.03.08

Esercizio 1. *Provare che se la caratteristica del campo* $\mathbb{F}$ *è diversa da* 2*, l'algebra* $sl(2, \mathbb{F})$ *è semplice.*

Esercizio 2. *Provare che se la caratteristica del campo* $\mathbb{F}$ *è uguale a* 2 *l'algebra* $sl(2, \mathbb{F})$ *non è semplice.*

Esercizio 3. *Siano* $\mathbb{F}$ *un campo e* L *lo spazio vettoriale di dimensione* 3 *su* $\mathbb{F}$ *con base* $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$ *e prodotto di Lie (bilineare, alternante) definito sugli elementi della base da*

$$[xy] = z, \quad [xz] = y, \quad [yz] = 0.$$

Mostrare che L *acquista la struttura di algebra di Lie.*

Esercizio 4. *Mostrare che per* $a, b \in gl(n, \mathbb{F})$ *risulta* $\mathrm{tr}([a, b]) = 0$*. Dedurre che* $sl(n, \mathbb{F})$ *è un ideale di* $gl(n, \mathbb{F})$*. Mostare che se* $f : gl(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *è una applicazione lineare tale che* $f([a, b]) = 0$ *per ogni* $a, b \in gl(n, \mathbb{F})$ *allora esiste* $\lambda \in \mathbb{F}$ *tale che*

$$f(a) = \lambda \, \mathrm{tr}(a) \qquad \forall a \in gl(n, \mathbb{F}).$$

(Nota: $\mathrm{tr}(x)$ *indica la traccia della matrice* x*)*

Esercitazione 2 del 20.03.08

Esercizio 5. *Siano* L *un'algebra di Lie e* D *una derivazione che commuta con* $\mathrm{ad}\, x$ *per ogni* $x \in L$*. Mostrare che* $D(L) \subseteq Z(L)$ *dove* $Z(L)$ *è il centro di* L*. Se* $Z(L) = 0$ *mostrare che* $Z(Der(L)) = 0$*.*

Esercizio 6. *Sia* L *un'algebra di Lie non abeliana di dimensione finita* n*. Provare che* $Z(L)$ *ha dimensione al più* $n - 2$*.*

Esercizio 7. *Sia* $x \in gl(n, \mathbb{F})$ *una matrice con* n *autovalori distinti in* $\mathbb{F}$*. Provare che* $\mathrm{ad}\, x$ *ammette gli* n^2 *autovalori* $a_i - a_j$*,* $1 \leq i, j \leq n$ *(non necessariamente distinti).*

Esercizio 8. *Mostrare che, a meno di isomorfismi, esiste una sola algebra di Lie* L *di dimensione* 3 *con* $[LL]$ *di dimensione* 1 *e* $[LL] \subseteq Z(L)$*.*

Esercizio 9. *Sia* L *l'algebra di Lie di dimensione* 2 *non abeliana. Dimostrare che* $Der(L) = \mathrm{ad}\, L$*.*

Esercitazione 3 del 27.03.08

Esercizio 10. *Sia* $\mathbb{F}$ *un campo di caratteristica zero. In* $sl(2, \mathbb{F})$ *si consideri la base standard* $\mathcal{B} = \{x, y, h\}$*. Posto*

$$\sigma = (\exp \mathrm{ad}\, x)(\exp \mathrm{ad}(-y))(\exp \mathrm{ad}\, x)$$

verificare che risulta $\sigma(x) = -y$, $\sigma(y) = -x$ e $\sigma(h) = -h$. Verificare inoltre che applicare σ agli elementi di $sl(2, \mathbb{F})$ equivale a coniugare gli elementi di $sl(2, \mathbb{F})$ tramite la matrice

$$s = (\exp x)(\exp(-y))(\exp x)$$

Esercizio 11. *Denotiamo con $sc(n, \mathbb{F})$ l'insieme delle matrici scalari $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{F}$. Provare che $sc(n, \mathbb{F})$ è il centro di $gl(n, \mathbb{F})$. Mostrare che il centro di $sl(n, \mathbb{F})$ è banale se la caratteristica di $\mathbb{F}$ non divide n mentre $Z(sl(n, \mathbb{F})) = sc(n, \mathbb{F})$ se la caratteristica di $\mathbb{F}$ divide n.*

Esercitazione 4 del 10.04.08

Esercizio 12. *Sia L l'algebra di Lie di dimensione 3 sul campo $\mathbb{F}$ con base $\{x, y, z\}$ e prodotto di Lie*

$$[xy] = z, \quad [xz] = y, \quad [yz] = 0.$$

Mostrare che L è risolubile ma non nilpotente.

Esercizio 13. *Sia L un'algebra di Lie nilpotente. Mostrare che se K è una sottoalgebra proria di L allora $K < N_L(K)$.*

Esercizio 14. *Sia $L \neq 0$ un'algebra di Lie nilpotente. Mostare che L ha un ideale di codimensione 1.*

Esercizio 15. *Sia $L \neq 0$ un'algebra di Lie nilpotente. Provare che L ha una derivazione esterna.*

Esercizio 16. *Sia B una sottoalgebra risolubile massimale dell'algebra di Lie L. Mostrare che $B = N_L(B)$.*

Esercitazione 5 del 17.04.08

Esercizio 17. *Sia $L = gl(n, \mathbb{F})$, provare che*

$$N_L(d(n, \mathbb{F})) = d(n, \mathbb{F}) \quad N_L(t(n, \mathbb{F})) = t(n, \mathbb{F}) \quad N_L(st(n, \mathbb{F})) = t(n, \mathbb{F})$$

Esercizio 18. *Sia $L = gl(V)$ provare che*

$$RadL = Z(L)$$

Soluzione

Sia $S = RadL$. È chiaro che che $Z(L)$, che è un ideale abeliano, è contenuto in S. Viceversa proviamo che $S \subseteq Z(L)$. Sia B una sottoalgebra di L risolubile massimale. Allora lo spazio vettoriale $B + S$ è una sottoalgebra di L perchè per $b, c \in B$ e $s, t \in S$

$$[b + s, c + t] = [b, c] + [b, t] + [s, c] + [s, t]$$

con $[b, c] \in B$ e $[b, t] + [s, c] + [s, t] \in S$. Inoltre $B + S$ è risolubile perchè $B/B \cap S$ è risolubile e $B/B \cap S \cong (B + S)/S$. Inoltre $B \subseteq B + S$. Dalla massimalità di B si deduce che $B + S = B$ ovvero $S \subseteq B$.

Per il teorema di Lie esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale $B = t(n, \mathbb{F})$ e dunque $S \subseteq t(n, \mathbb{F})$. Osserviamo anche che se B è una sottoalgebra risolubile massimale allora

anche $B^t = \{b^t : b \in B\}$ è una sottoalgebra risolubile massimale (qui b^t indica la trasposta di b). Si tratta di osservare che $[b^t, c^t] = ([c, b])^t$ e pertanto $[B^t, B^t] = [B, B]^t$. Ovvero si può osservare che l'applicazione $x \to -x^t$ è un automorfismo di L.
Segue che $S \subseteq (t(n, \mathbb{F}))^t$ così $S \subseteq d(n, \mathbb{F})$.
Si tratta ora di far vedere che $S \subseteq sc(n, \mathbb{F}) = Z(L)$. Sia $x \in S$ con $x = \sum_{k=1}^n a_k e_{kk}$ e consideriamo, per $i \neq j$,

$$[x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x = (a_i - a_j)e_{ij}.$$

Siccome $[x, e_{ij}] \in S \subseteq d(n, \mathbb{F})$ deve essere $a_i = a_j$. Questo completa la soluzione.

Esercizio 19. *Sia $\mathbb{F}$ un campo di caratteristica p e siano x e y le due matrici*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & p-1 \end{pmatrix}$$

in $gl(p, \mathbb{F})$. Verificare che $[x, y] = x$ e che x e y non hanno autovettori in comune. (Se L è il sottospazio generato da x e y, L è una sottoalgebra di $gl(p, \mathbb{F})$ risolubile di dimensione 2 non abeliana. Se ne deduce che il teorema di Lie non vale in caratteristica positiva).

Esercitazione 6 del 24.04.08

Esercizio 20. *Sia $L \subseteq gl(V)$ un'algebra di Lie e si consideri lo spazio vettoriale*

$$M = L \oplus V$$

con prodotto di Lie

$$[(x, v), (y, u)] = ([x, y], x(u) - y(v))$$

Mostrare che M è un'algebra di Lie. Siano poi p un numero primo, $\mathbb{F}$ un campo di caratteristica p e siano x e y le due matrici

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & p-1 \end{pmatrix}$$

in $gl(p, \mathbb{F})$ e L la sottolagebra di $gl(p, \mathbb{F})$ generata da x e y. Mostrare che $M = L \oplus \mathbb{F}^p$ è risolubile ma $[MM]$ non è nilpotente.

Esercizio 21. *Sia L l'algebra di dimensione due non abeliana. Mostrare che la forma di Killing di L è degenere.*

Esercitazione 7 del 08.05.08

Esercizio 22. *Provare che L è risolubile se e solo se $[LL]$ è contenuto nel radicale della forma di Killing.*

Esercizio 23. *Sia L l'algebra di Lie di dimensione 3 con base $\{x, y, x\}$ e prodotto di Lie*

$$[xy] = z, \quad [xz] = y, \quad [yz] = 0.$$

Determinare il radicale della forma di Killing.

Esercizio 24. *Sia $M = sl(3, \mathbb{F})$ allora M contiene una copia di $L = sl(2, \mathbb{F})$ considerando le matrici con entrate nulle nella terza riga e terza colonna. Consideriamo M come L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta. Scomporre M in somma diretta di L-moduli irriducibili:*

$$M = V(0) \oplus V(1) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

Esercitazione 7 del 08.05.08

Esercizio 25. *Mostrare che ogni sottoalgebra torica massimale di $sl(2, \mathbb{F})$ ha dimensione 1.*

Esercizio 26. *Siano L semisemplice e H torica massimale in L. Provare che $N_L(H) = H$.*

Esercizio 27. *Calcolare esplicitamente la forma di Killing ristretta alla sottoalgebra torica massimale $H = sl(n, \mathbb{F}) \cap d(n, \mathbb{F})$ di $sl(n, \mathbb{F})$.*

Esercizio 28. *Scrivere esplicitamente la decomposizione di Cartan dell'algebra simplettica $sp(4, \mathbb{F})$ rispetto alla sottoalgebra torica massimale $sp(4, \mathbb{F}) \cap d(4, \mathbb{F})$.*