Compito di Istituzioni di Algebra
22 settembre 2008

Esercizio 1. *In* $sl(2, \mathbb{F})$ *si consideri la base standard* $\{x, y, h\}$*, ovvero*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'azione dell'automorfismo $\sigma = \exp(\operatorname{ad} y) \exp(\operatorname{ad} x)$ *sugli elementi della base di* L.

Esercizio 2. *Siano* L *un'algebra di Lie e* D *una derivazione di* L*. Provare, per induzione su* n*, che*

$$D^n([x, y]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [D^i(x), D^{n-i}(y)]$$

per $n \geq 1$*. Dedurre che se* L *è un'algebra di Lie su un campo di caratteristica positiva* p *allora* D^p *è ancora una derivazione di* L*.*
(Sugg: ricordare l'uguaglianza $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$ per $1 \leq i \leq n$)

Esercizio 3. *Sia* L *un'algebra di Lie (di dimensione finita) sul campo complesso. Mostrare che, se ogni sottoalgebra di* L *di dimensione due è abeliana, allora* L *è nilpotente.* (Sugg.: usare il teorema di Engel)