

Compito di Istituzioni di Algebra
10 giugno 2008

Esercizio 1. *Siano L un'algebra di Lie e I un ideale di L . Provare che il sottoinsieme*

$$J = \{x \in I \mid D(x) \in I, \forall D \in \text{Der}(L)\}$$

è un ideale di L e che risulta $[II] \subseteq J$.

Esercizio 2. *Sia L l'algebra di Lie di dimensione 3 su un campo \mathbb{F} con base $\{x, y, z\}$ e prodotto di Lie*

$$[xy] = z, \quad [yz] = x, \quad [zx] = y.$$

(1) *Mostrare che L è un'algebra semplice.*

(2) *Determinare la matrice della forma di Killing di L .*

Esercizio 3. *Nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ campo dei numeri complessi, provare che l'algebra dell'esercizio precedente è isomorfa a $sl(2, \mathbb{C})$*

Sugg: diagonalizzare la matrice di $\text{ad } x$. Si trova allora una base per L costituita da autovettori per $\text{ad } x$. Un isomorfismo esplicito si ha mandando x in $-2ix$, y in $-y + iz$ e z in $y + iz$, $i^2 = -1$.