Compito di Istituzioni di Algebra
28 marzo 2007

Esercizio 1. *Sia* $\mathbf{t}(\mathbf{3}, \mathbb{F})$ *l'algebra delle matrice tringolari alte, di ordine* 3*, a coefficienti in un assegnato campo* $\mathbb{F}$*. Determinare la matrice della forma di Killing di* $\mathbf{t}(\mathbf{3}, \mathbb{F})$*.*

Esercizio 2. *Sia* L *il sottoinsieme di* $gl_4(\mathbb{F})$ *definito da*

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & c \end{array} \right) : a, b, c \in gl_2(\mathbb{F}) \right\}.$$

Sia poi R *il sottoinsieme di* L *definito da*

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_2 & d \\ \hline 0 & \mu I_2 \end{array} \right) : \lambda, \mu \in \mathbb{F}, d \in gl_2(\mathbb{F}) \right\},$$

dove I_2 *è la matrice identità* 2×2*.*

(1) *Provare che* L *è una sottolgebra di* $gl_4(\mathbb{F})$*.*
(2) *Provare che* R *è un ideale di* L*.*

Esercizio 3. *Siano* L *un'algebra di Lie e* D *una derivazione di* L*.*

(1) *Provare che, se* D *commuta con* $\operatorname{ad} x$ *per ogni* $x \in L$*, allora* $D(L) \subseteq Z(L)$*, dove* $Z(L)$ *è il centro di* L*.*
(2) *Provare che, se* $Z(L) = 0$*, risulta* $Z(Der(L)) = 0$*.*

Sugg.: ricordare l'uguaglianza $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} D(x)$*.*