Compito di Istituzioni di Algebra
25 settembre 2007

Esercizio 1. *Sia L l'algebra di Lie, su un campo $\mathbb{F}$, con base $\{a, b, c, d\}$ e prodotto di Lie definito da*

$$[a, b] = c \quad [d, a] = a \quad [b, d] = b \quad [c, a] = [c, b] = [c, d] = 0.$$

(1) *Verificate che L è una algebra di Lie.*
(2) *Mostrate che L è risolubile.*

Esercizio 2. *Sia $f : gl(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ una applicazione lineare tale che $f([a, b]) = 0$, per ogni a, b in $gl(n, \mathbb{F})$. Mostrare che, per ogni c in $gl(n, \mathbb{F})$, risulta*

$$f(c) = k \operatorname{tr}(c)$$

dove k è una costante e $\operatorname{tr}(c)$ è la traccia di c. Sugg: ricordare le uguaglianze $e_{i,j} = [e_{i,j}, e_{j,j}]$, per $i \neq j$, e $e_{i,i} - e_{j,j} = [e_{i,j}, e_{j,i}]$. Qui $e_{i,j}$ è la matrice con 1 in posizione (i, j) e 0 altrove.

Esercizio 3. *Sia L l'algebra di Lie, su un campo $\mathbb{F}$ di caratteristica 0, con base $\{a, b, c\}$ e prodotto di Lie*

$$[a, b] = b \quad [a, c] = -c \quad [b, c] = a.$$

Mostrare che L è isomorfa a $sl(2, \mathbb{F})$. Sugg.: si confronti il comportamento degli elementi della terna ordinata $\{a, b, c\}$ con quello degli elementi della base canonica $\{h, x, y\}$ di $sl(2, \mathbb{F})$.