Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Controllo Ottimo

Docente: Andrea Calogero
8 CFU
1° semestre

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Ottimizzazione e Analisi Convessa

Docente: Rita Pini
8 CFU
2° semestre

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Ottimizzazione e Analisi Convessa

0.0.1 Il modello di Markowitz

Un decisore deve investire una unità di capitale distribuendola su n titoli rischiosi di cui sono noti

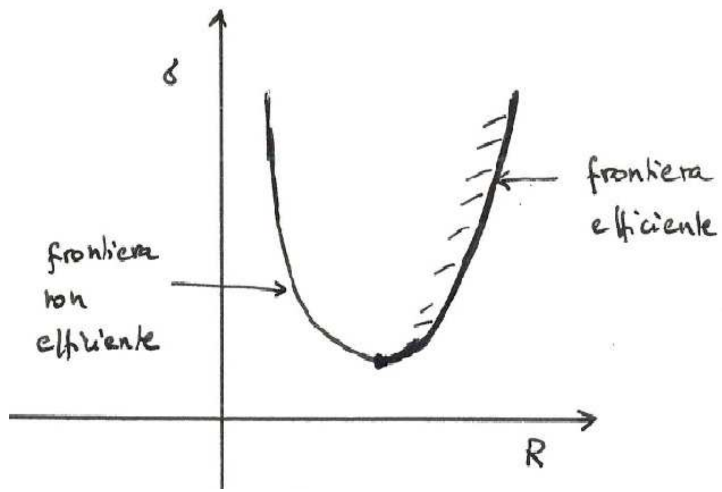
- il rendimento medio $r = (r_1, \ldots, r_n)$, con r_i rendimento i-esimo titolo
- la matrice varianza-covarianza $V = [v_{i,j}]_{i,j=1,\ldots n}$ degli n titoli.

Sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un portafoglio, ove x_i rappresenta il capitale investito nell' i-esimo titolo. Il suo rendimento atteso sarà

$$\langle x, r \rangle.$$

Obiettivo dell'investitore è ottenere un rendimento atteso R fissato, con il minimo rischio.

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma(x) = x^T V x \\ \langle x, r \rangle = R \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$



0.0.2 Il problema di von Neumann di crescita economica

Si considera il problema

$$\max\{\gamma :\ \exists y \neq 0,\ y \geq 0,\ (B-\gamma A)y \geq 0\}$$

dove A, B sono matrici $m \times n$ non negative, e A non ha colonne identicamente nulle;

- ogni indice riga i rappresenta un 'bene', ed ogni indice colonna un 'procedimento' (di fabbricazione, ad esempio); il procedimento j può convertire $a_{i,j}$ unità di bene i (in unità di tempo) in $b_{i,j}$ unità di bene i

- y_j rappresenta l'intensità con cui si fa lavorare il procedimento j;

- By rappresenta l'output prodotto, Ay l'input consumato;

- γ rappresenta il fattore di crescita all'intensità y; la condizione $By \geq \gamma Ay$ equivale a richiedere che per ogni bene i la quantità prodotta sia almeno pari alla quantità di bene i richiesta, se il fattore di crescita economica è pari a γ

0.0.3 Due esempi di comportamento strategico

1. Anna e Marco partecipano a un gioco televisivo, seduti in cabine separate e senza la possibilità di comunicare. A ciascuno è richiesto di sottoporre, in busta chiusa, una delle due richieste seguenti (richiesta che sarà soddisfatta):

- ricevere 1000 euro
- dare 4000 euro all'altro partecipante

Come si comporteranno Anna e Marco, e perché?

2. Un conduttore di un gioco chiede a 50 persone di scrivere separatamente su un foglio, insieme al loro nome, un numero intero qualsiasi tra 0 e 100. Se x è la media dei numeri scritti, vincerà un premio di 1000 euro il giocatore che più si è avvicinato al numero $\frac{2}{3}x$ (se ci sono più vincitori, il premio sarà equamente suddiviso).

Che scelte faranno i giocatori?

0.0.4 Programma

- Introduzione ai problemi di ottimizzazione.
- Esempi in ambito economico.
- Ottimizzazione libera.
- Principio variazionale di Ekeland.
- Teoremi dell'alternativa.
- Analisi convessa e teoremi di separazione.
- Programmazione non lineare.
- Teoria della dualità e programmazione convessa.
- Giochi strategici ed equilibrio di Nash.
- Giochi a due giocatori a somma zero.
- Strategie miste in giochi finiti.

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Controllo Ottimo

0.0.5 A model of optimal consumption

Consider an investor who, at time $t = 0$, is endowed with an initial capital $x(0) = x_0 > 0$. At any time he and his heirs decide about their rate of consumption $c(t) \geq 0$. Thus the capital stock evolves according to

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = rx(t) - c(t)$$

where $r > 0$ is a given and fixed rate to return. The investor's time utility for consuming at rate $c(t)$ is $U(c(t))$. The investor's problem is to find a consumption plain so as to maximize his discounted utility

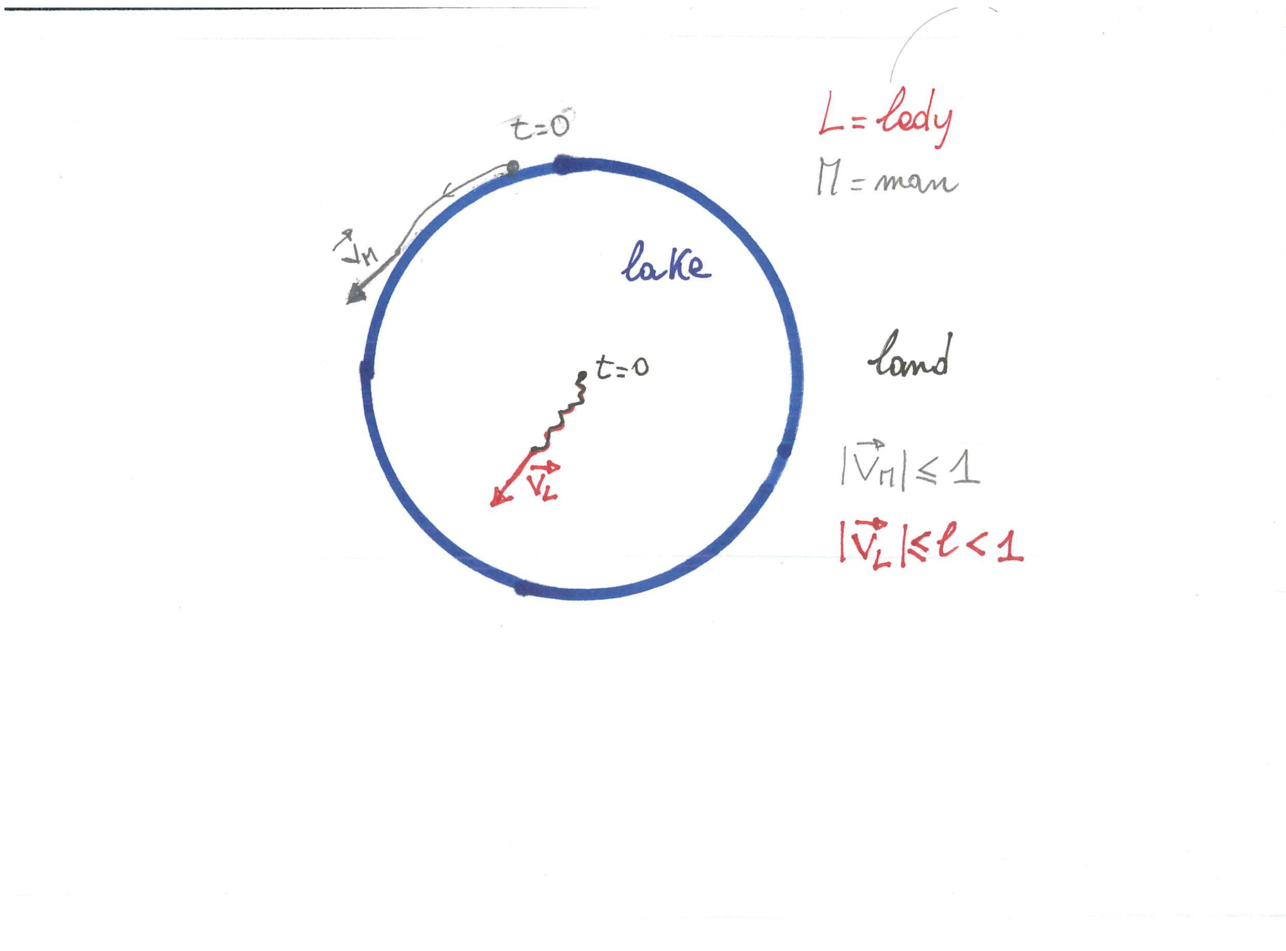
$$\int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t)) dt$$

where δ, with $\delta \geq r$, is a given discount rate, subject to the solvency constraint that the capital stock $x(t)$ must be positive for all $t \geq 0$ and such that vanishes at ∞. Then the problem is

$$
\begin{cases}
\max\limits_{c\in\mathcal{C}} \int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t))\,\mathrm{d}t \\
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(t) - c(t) \\
x(0) = x_0 > 0 \\
x(t) \geq 0 \\
\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0 \\
\mathcal{C} = \{c : [0,\infty) \to [0,\infty),\ \text{measurable}\}
\end{cases}
\tag{1}
$$

with $\delta \geq r \geq 0$ fixed constants.

0.0.6 The lady in the lake



A lady (E=Evader) is swimming in a circular lake with a constant speed $v_{Lady} = v_E < 1$; she can change the direction in which she swims instantaneously. A man (P=Pursuer) is not a swimmer and he wishes to intercept the lady when she reaches the shore; he is in a side of the lake and can run along the perimeter with maximum speed $v_{Man} = v_P = 1$. He also can change his direction instantaneously. We assume that the lady and the man never get tired. E doesn't stay in the lake forever and she wishes to come out without being caught by the man; in the land, E can run faster than P. E's goal is to maximize the pay-off, which is the angular distance θ viewed from the center C of the lake, at the time E reaches to the store. P obviously wants minimize such pay-off.

.... we have the two-person zero-sum game

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}:\ \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad\qquad \textit{Lady (E)}:\ \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ \qquad |u_1| \le 1 \\ \qquad\qquad \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \qquad\qquad \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_E \cos u_2 \\ \qquad\qquad r(0) = 0,\ r(T) = R \end{cases}$$

0.0.7 Programma

Alcuni problemi introduttivi

1. IL CONTROLLO OTTIMO CON LA TECNICA VARIAZIONALE.

Il problema più semplice di controllo ottimo.

Problemi più generali: a tempo minimo, a orizzonte infinito.

Teoria (con dimostrazioni significative), esercizi e modelli.

2. IL CONT. OTT. CON LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA.

Il problema più semplice di controllo ottimo.

Problemi più generali: a orizzonte infinito.

Legami tra tecnica variazionale e Programmazione Dinamica.

Teoria (con dimostrazioni significative), esercizi e modelli.

3. TEORIA DEI GIOCHI DIFFERENZIALI.

Nozioni di equilibrio e di strategie

Equilibrio di Nash. Equilibrio di Stackelberg. Giochi a somma zero.

Giochi di cattura ed evasione.

Teoria (con dimostrazioni significative) e modelli.

Materiale didattico, programma, temi di esame su

http://www.matapp.unimib.it/ ~calogero